THEORETISCHE UNTERSUCHUNG DER LICHTABSORPTION IN PHOTOREZEPTOREN

WERNER FISCHER

1972

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546014_0013

Theoretische Untersuchung der Lichtabsorption in Photorezeptoren

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt
von

Werner Fischer

München, im Mai 1972

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Berichterstatter: 1. Prof. Dr. R. Röhler
2. Prof. Dr. Dr. Dr. h.c. H. Sch

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Juli 1972

Inhaltsverzeichnis

		Seite
1.	Einleitung	1
2.	Entwicklung eines geeigneten Rezeptormodells	3
3.	Theoretische Behandlung des zylindersymmetrischen Einrezeptormodells	5
3.1	Die Wellenleitermoden als Eigenfunktionen	7
3.11	Ergebnisse und Diskussion	11
3.2	Die Anregung eines unendlichen Rezeptors	15
3.21	Ergebnisse und Diskussion	21
3.3	Die Anregung eines endlichen Rezeptors	26
3.31	Die Anregungsenergien der Moden	34
3.32	Ergebnisse und Diskussion	36
4.	Zusammenfassung	44
5.	Anhang	46

1. Einleitung

In den Rezeptoren der Netzhaut wird elektromagnetische Lichtenergie in elektrochemische Reize umgewandelt. Diese im Rahmen des Sehvorganges bedeutsame Tatsache ist seit langem bekannt, dagegen noch nicht die genaue Wirkungsweise der Rezeptoren. Die Untersuchungen darüber begannen als Folge experimenteller Befunde, deren Erklärung im optischen Verhalten der Netzhaut zu suchen war.

Zu diesen Eigenschaften gehören der Stiles-Crawford Effekt, der eindeutig auf Empfangscharakteristiken der Rezeptoren zurückzuführen ist, und in Verbindung damit Polarisationseffekte, z.B. bei Reflektionen an der Netzhautoberfläche [CAMPBELL und GUBISCH] sowie [RÖHLER, MILLER und ABERL]. Weiter ergab sich bei Messungen an Netzhäuten in vivo eine viel höhere Absorption, als nach der Rhodopsinkonzentration zu erwarten gewesen wäre [PIRENNE 1962]. Dies wurde von RUSHTON "funnelling effect" genannt, eine Art Trichterwirkung des Rezeptors.

Frühere Versuche, die Wirkungsweise der Rezeptoren mit geometrischer Optik zu lösen, sind auf Grund der Größenverhältnisse in der Netzhaut falsch. Es ist nämlich die Wellenlänge des sichtbaren Lichts ungefähr so groß wie ein Rezeptorradius ($\lambda \approx a$). Die Erklärung für das experimentell nachgewiesene sogenannte "funneling" kann wie hier nur auf wellentheoretischer Grundlage gemacht werden. Die Behandlung der Lichtabsorption nach klassischen Methoden, also die Beschreibung der Elektron-Photon Wechselwirkung durch komplexe Dielektrizitätskonstanten, ist vertretbar wegen der Häufigkeit der Prozesse bei normalerweise einfallenden Lichtintensitäten.

Auf wellentheoretischer Grundlage begann INGELSTAM, E. (1956) mit Untersuchungen über das Farbunterscheidungsvermögen der Rezeptoren. Weitere Arbeiten [SNITZER 1961; KAPANY 1967] beruhten auf der von TORALDO DI FRANCIA (1949) und ENOCH (1963) vertretenen Tatsache, daß sich die Netzhautrezeptoren gegenüber Licht wie Wellenleiter verhalten. Die bei Lichteinfall angeregten Eigenfunktionen, die sogenannten Wellenleitermoden, wurden nach Methoden wie in der Elektrotechnik untersucht. Diese Moden wurden aber immer für nicht dämpfende Medien behandelt. KAPANY (1963) schätzte die Absorption aus ungedämpften Moden.

In der vorliegenden Arbeit wird die absorbierende Eigenschaft von Photorezeptoren direkt berücksichtigt durch komplexe Dielektrizitätskonstanten bzw. Brechzahlen. Nur auf diese Weise werden die Aussagen über das Absorptionsverhalten evident.

Zu Anfang werden verschiedene Rezeptormodelle betrachtet im Hinblick auf ihre Genauigkeit und ihre Praktikabilität. Als Folgerung wird daraufhin mit Hilfe der Maxwellschen Theorie das Modell eines zylindersymmetrischen Photorezeptors behandelt, zuerst qualitativ die Eigenschaften der Wellenleitermoden als Eigenfunktionen, dann die Anregung eines unendlich gedachten Rezeptors und zuletzt die Anregung eines endlichen Rezeptors.

2. Entwicklung eines geeigneten Rezeptormodells

Der Aufbau und die Struktur der Netzhaut mit den darinliegenden Rezeptoren ist relativ gut bekannt und mehrfach dargestellt (z.B. in VISION von J.J. Wolken).

Die Rezeptoren bestehen aus inneren und äußeren Segmenten. Das einfallende Licht durchläuft erst die inneren Segmente, die der Signalverarbeitung und der Regeneration der Photosensitivität dienen, optisch aber kaum eine Rolle spielen (Brechzahldifferenzen von 0.02) und in der vorliegenden Arbeit nicht weiter berücksichtigt werden. Der Photoprozeß spielt sich in den äußeren Segmenten ab. Diese haben beim Menschen einen Durchmesser von ca. 1μ. Aufgebaut sind sie durch periodisches Hintereinanderschalten von gleichartigen Lamellen (dense layers). Letztere enthalten das Rhodopsin, den bisher einzig festgestellten Sehfarbstoff mit einem Moleküldurchmesser von 50 Angström.

Um eine theoretische Behandlung des Absorptionsverhaltens in einem durchführbaren Rahmen zu ermöglichen, müssen physikalisch vertretbare Vereinfachungen vorgenommen werden:

a) Der Absorptionsvorgang wird klassisch behandelt. Zwar können einzelne Photonen registriert werden, doch ist normalerweise die Anzahl der Quantenprozesse pro Zeit- und Raumeinheit so groß, daß die klassische Näherung auf jeden Fall Gültigkeit besitzt.

b) Die Grenzschichten zwischen Rezeptor und Umgebung werden ideal als unendlich dünn angenommen. Das bringt gewisse Schwierigkeiten mit sich, wenn mehrere Grenzschichten zusammenstoßen (siehe Abschnitt 3.3), macht aber eine mathematische Behandlung erst durchführbar.

c) Die Annahme von zylindersymmetrischen Rezeptoren verändert die physikalischen Eigenschaften nicht merklich, erleichtert dagegen die Mathematik.

d) Die Reflektionen am Pigmentepithel bleiben außer Betracht.

e) Die Lamellenstruktur braucht nicht berücksichtigt zu werden, da die Lamellendicke wesentlich kleiner ist als die Lichtwellenlänge im sichtbaren Bereich.

f) Die Rezeptoren werden durch absorbierende Zylinder dargestellt.

g) Die elektromagnetischen Eigenschaften der Medien werden isotrop angenommen. Dadurch wird die Wirkungsweise der Rezeptoren qualitativ nicht anders.

h) Die Nichtberücksichtigung der Mehrfachkopplung von Rezeptoren bzw. der Translationssymmetrie der Netzhaut ist hier zu vertreten, da das Auflösungsvermögen der Netzhaut nicht untersucht wird.

Als Resultat liegt ein zylindersymmetrisches Einrezeptormodell vor, das im nächsten Abschnitt behandelt wird.

Die Brechzahlen sind experimentellen Angaben von BARER (1957) entnommen. Danach ist die Brechzahl im Kern $n_I = 1.408 - i \cdot 0.0028$, im umgebenden Medium $n_{II} = 1.34$, weiter ist die Brechzahl der Augenflüssigkeit $n_{III} = 4/3$. Der Imaginärteil von n_I wurde entsprechend experimentellen Absorptionsmessungen gewählt.

3. Theoretische Behandlung des zylindersymmetrischen Einrezeptormodells

In diesem Kapitel wird mit Hilfe der Maxwellschen Theorie das elektromagnetische Verhalten, insbesondere das Absorptionsverhalten eines Rezeptors untersucht. Dabei ist der Rezeptor dargestellt als Zylinder vom Radius a, seine Lichtabsorption wird im Maxwellschen Formalismus erfaßt durch eine komplexe Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_x = \varepsilon' + i\varepsilon''$ ($\varepsilon'' < 0$). Dies ist die klassische Beschreibung der fast ausschließlich als elektrischer Dipolübergang vorkommenden Elektron-Photon Wechselwirkung beim Absorptionsprozeß. Die Umgebung des Rezeptors ist optisch nicht so dicht, hat demnach eine kleinere Dielektrizitätskonstante ε_x. Die magnetische Suszeptibilität μ ist nahezu eins, sodaß die jeweilige Brechzahl gleich der Wurzel aus der Dielektrizitätskonstanten ist $(n = \sqrt{\varepsilon})$.

Die elektromagnetischen Eigenschaften werden vollständig beschrieben durch die elektromagnetischen Felder $\vec{E}(r,t)$ und $\vec{H}(r,t)$.
Zur Bestimmung dieser Feldgrößen wird ausgegangen von den Maxwellschen Schwingungsgleichungen

$$\Delta \vec{E}(r,t) = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{E}}(r,t) \qquad \text{und} \qquad \Delta \vec{H}(r,t) = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{H}}(r,t)$$

Da für die vorliegenden Verhältnisse die Beschreibung des stationären Problems ausreicht, wird mittels Produktansatz der Zeitanteil von $\vec{E}(r,t)$ und $\vec{H}(r,t)$ separiert.

Dies führt zur stationären Schwingungsgleichung

$$\Delta \vec{E}(r) + k^2 \vec{E}(r) = 0 \qquad \text{analog für } \vec{H}(r) \text{ ,wobei } k^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}$$

Unter Berücksichtigung der Zylindersymmetrie hat die Differentialgleichung in Zylinderkoordinaten folgende Form

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \vec{E}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + k^2 \vec{E} = 0$$

Nach Produktansatz (Separation der Variablen)

$$\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}_\rho(\rho)\,\mathcal{E}_\varphi(\varphi)\,\mathcal{E}(z)$$

erhält man die allgemeinen Lösungen

$$\mathcal{E}_\rho = \begin{Bmatrix} J_\ell(k_\rho \rho) \\ N_\ell(k_\rho \rho) \end{Bmatrix} \quad , \quad \mathcal{E}_\varphi = \begin{Bmatrix} e^{i\ell\varphi} \\ e^{-i\ell\varphi} \end{Bmatrix} \quad , \quad \mathcal{E}_z = \begin{Bmatrix} e^{ik_z z} \\ e^{-ik_z z} \end{Bmatrix}$$

$J_\ell(k_\rho \rho)$ sind die Besselfunktionen, $N_\ell(k_\rho \rho)$ die Neumannfunktionen

Dabei gilt $k_\rho^2 + k_z^2 = k^2$, weiter ist ℓ ganzzahlig.

Aus diesen allgemeinen Lösungen werden jeweils mittels Regularitäts-, Eindeutigkeits-, Stetigkeits- und Randbedingungen bestimmte Lösungen ausgesondert, die dem physikalischen Sachverhalt entsprechen.

Die gesuchten Ortskomponenten von $\mathcal{E}(r)$ und $\mathcal{H}(r)$ sind durch die Maxwellschen Gleichungen in der Weise miteinander verknüpft, daß im allgemeinen Fall 2 unabhängige Größen das elektromagnetische Feld bestimmen. In diesem Falle werden $E_z(r)$ und $H_z(r)$ als unabhängige Feldkomponenten gewählt.

Die 4 restlichen Komponenten besitzen dann folgende Abhängigkeit

$$E_\rho = \frac{i}{k_\rho^2}\left(\frac{\omega\mu}{c}\,\frac{1}{\rho}\,H_{z/\varphi} + k_z\,E_{z/\rho} \right) \qquad H_{z/\varphi} \triangleq \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}$$

$$E_\varphi = \frac{i}{k_\rho^2}\left(\frac{k_z}{\rho}\,E_{z/\varphi} - \frac{\omega\mu}{c}\,H_{z/\rho} \right)$$

$$H_\rho = \frac{i}{k_\rho^2}\left(k_z\,H_{z/\rho} - \frac{\omega\varepsilon}{c}\,\frac{1}{\rho}\,E_{z/\varphi} \right)$$

$$H_\varphi = \frac{i}{k_\rho^2}\left(\frac{\omega\varepsilon}{c}\,E_{z/\rho} + \frac{k_z}{\rho}\,H_{z/\varphi} \right)$$

3.1 Die Wellenleitermoden als Eigenfunktionen

Die Eigenfunktionen der elektromagnetischen Schwingungsgleichung beim dielektrischen Zylinder werden in Anlehnung an die Elektrotechnik Wellenleitermoden genannt. Diese Moden laufen in nichtabsorbierenden Medien mit konstanter Amplitude entlang dem optisch dichteren Kern. Sie sind auch bei der Absorption im Rezeptor gegenüber dem radial auslaufenden Strahlungsfeld von größerer Bedeutung.

Unter Berücksichtigung der Regularität im Nullpunkt ($\rho = 0$) und eines physikalisch sinnvollen Verhaltens für $\rho \to \infty$ lauten die allgemeinen Lösungen (wie ebenfalls von SNITZER 1961 verwendet) für den Rezeptorkern bzw. Bereich I

$$E_z^I(\rho,\varphi,z) = A_\ell \, e^{i k_z^I z} \, e^{i\ell\varphi} \, J_\ell(k_\rho^I \rho)$$

$$H_z^I(\rho,\varphi,z) = B_\ell \, e^{i k_z^I z} \, e^{i\ell\varphi} \, J_\ell(k_\rho^I \rho)$$

für die Umgebung bzw. Bereich II

$$E_z^{II}(\rho,\varphi,z) = C_\ell \, e^{i k_z^{II} z} \, e^{i\ell\varphi} \, Z_\ell(k_\rho^{II} \rho)$$

$$H_z^{II}(\rho,\varphi,z) = D_\ell \, e^{i k_z^{II} z} \, e^{i\ell\varphi} \, Z_\ell(k_\rho^{II} \rho)$$

Dabei ist $Z_\ell(k_\rho^I \rho)$ in Abhängigkeit von k_ρ^I entweder die Hankelfunktion 1. Art $H_\ell^{(1)}(k_\rho^I \rho)$ oder 2. Art $H_\ell^{(2)}(k_\rho^I \rho)$ derart, daß für $\rho \to \infty$ $Z_\ell(k_\rho^I \rho)$ gleich Null ist.

Für die 4 Koeffizienten $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$ werden 4 Stetigkeitsbedingungen benötigt, und zwar wird dafür die Stetigkeit der Tangentialkomponenten an der Grenzfläche $\rho = a$ verwandt.

$$E_z^I = E_z^{II} \;,\quad E_\varphi^I = E_\varphi^{II} \;,\quad H_z^I = H_z^{II} \;,\quad H_\varphi^I = H_\varphi^{II}$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen ergibt sich sofort $k_z^{II} = k_z^I = k_z$

d.h., die z-Komponenten des Wellenvektors k sind in beiden Bereichen gleich.

Die 4 Bedingungsgleichungen für die 4 Koeffizienten $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$ lauten danach

$$\mathcal{J}_\ell(z_I)\,A_\ell - \mathcal{Z}_\ell(z_{II})\,C_\ell = 0$$

$$\mathcal{J}_\ell(z_I)\,B_\ell - \mathcal{Z}_\ell(z_{II})\,D_\ell = 0$$

$$-\frac{k_z}{z_I^2}\,\ell\,\mathcal{J}_\ell(z_I)\,A_\ell - \frac{i\omega}{c z_I}\,\mathcal{J}'_\ell(z_I)\,B_\ell + \frac{k_z}{z_{II}^2}\,\ell\,\mathcal{Z}_\ell(z_{II})\,C_\ell + \frac{i\omega}{c z_{II}}\,\mathcal{Z}'_\ell(z_{II})\,D_\ell = 0$$

$$\frac{i\omega\varepsilon_I}{c z_I}\,\mathcal{J}'_\ell(z_I)\,A_\ell + \frac{k_z}{z_I^2}\,\ell\,\mathcal{J}_\ell(z_I)\,B_\ell - \frac{i\omega\varepsilon_{II}}{c z_{II}}\,\mathcal{Z}'_\ell(z_{II})\,C_\ell - \frac{k_z}{z_{II}^2}\,\ell\,\mathcal{Z}_\ell(z_{II})\,D_\ell = 0$$

Dabei sind $z_I = k_\rho^I a$, $z_{II} = k_\rho^{II} a$ und $\mathcal{J}'_\ell(z_I) = \left(\frac{d\mathcal{J}}{dz}\right)_{z=z_I}$

Um nichttriviale Lösungen zu erhalten für $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$, muß die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwinden. Danach sind die Koeffizienten bis auf einen bestimmt, der komplexen Charakter hat und in Betrag und Phase den Anregungsgrad der Mode angibt.

Die Koeffizientenmatrix hat folgendes Aussehen

$$\begin{pmatrix}
\mathcal{J}_\ell(z_I) & 0 & -\mathcal{Z}_\ell(z_{II}) & 0 \\
0 & \mathcal{J}_\ell(z_I) & 0 & -\mathcal{Z}_\ell(z_{II}) \\
-\frac{k_z}{z_I^2}\,\ell\,\mathcal{J}_\ell(z_I) & -\frac{i\omega}{c z_I}\,\mathcal{J}'_\ell(z_I) & \frac{k_z}{z_{II}^2}\,\ell\,\mathcal{Z}_\ell(z_{II}) & \frac{i\omega}{c z_{II}}\,\mathcal{Z}'_\ell(z_{II}) \\
\frac{i\omega\varepsilon_I}{c z_I}\,\mathcal{J}'_\ell(z_I) & \frac{k_z}{z_I^2}\,\ell\,\mathcal{J}_\ell(z_I) & -\frac{i\omega\varepsilon_{II}}{c z_{II}}\,\mathcal{Z}'_\ell(z_{II}) & -\frac{k_z}{z_{II}^2}\,\ell\,\mathcal{Z}_\ell(z_{II})
\end{pmatrix}$$

Nach den Umformungen $\widetilde{\mathcal{F}}_\ell = \frac{\mathcal{F}'_\ell(z_I)}{z_I\,\mathcal{F}_\ell(z_I)}$ und $\widetilde{\mathcal{Z}}_\ell = \frac{\mathcal{Z}'_\ell(z_{II})}{z_{II}\,\mathcal{Z}_\ell(z_{II})}$

erhält man aus der Determinantenbedingung die Gleichung

$$k_z^2\,\ell^2\left(\frac{1}{z_{II}^2} - \frac{1}{z_I^2}\right)^2 + \left(\widetilde{\mathcal{Z}}_\ell - \widetilde{\mathcal{F}}_\ell\right)\left(\widetilde{\mathcal{Z}}_\ell\,k_{II}^2 - \widetilde{\mathcal{F}}_\ell\,k_I^2\right) = 0$$

Diese komplexe und transzendente Bedingungsgleichung für die Eigenwerte $k_z = \varkappa_{\ell m}$ kann nur auf numerischem Wege gelöst werden (siehe Anhang A2).

Die Eigenwerte sind auf Grund der komplexen Dielektrizitätskonstanten ε_I ebenfalls komplex. Sie bestimmen die Charakteristik der Eigenfunktionen. Ihre Imaginärteile geben dabei direkt den Dämpfungsgrad der Moden in Laufrichtung entlang der z-Achse an.

Von größter Bedeutung für das Verständnis der Wirkungsweise der Photorezeptoren ist der Energieaustausch zwischen Rezeptor und seiner Umgebung. Eine Aussage darüber erhält man aus der Richtungseinstellung des Wellenvektors $\vec{k}$ bzw. aus seiner z-Komponente k_z, nämlich dem Eigenwert $\varkappa_{\ell m}$ der jeweiligen Mode.

Die Energieverhältnisse beschreibt man am besten mit Hilfe des Poyntingvektors (im cgs-System)

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*\right)$$

Die Energiebilanz sieht dazu folgendermaßen aus

$$\int_V \operatorname{div}\vec{\gamma}\; d^3r = \frac{1}{4\pi}\int_V \left[\left(\vec{\mathcal{H}}\dot{\vec{\mathcal{H}}}^* + \vec{\mathcal{E}}\,\dot{\vec{\mathcal{D}}}^*\right) - j\vec{\mathcal{E}}\right] d^3r = 0 \qquad j = 0$$

Mit dem Ansatz $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0(r)\,e^{i\omega t}$ ergibt sich die Energieabsorption im Volumelement unter Berücksichtigung von $\vec{\mathcal{D}}(r) = \varepsilon\,\vec{\mathcal{E}}(r)$ und der Mittelung über die Zeit zu

$$S_{abs} = Re(div\,\gamma) = \frac{1}{4\pi} Re(-i\omega\varepsilon^* \mathcal{E}\mathcal{E}^*)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\omega\varepsilon'' |\mathcal{E}_0(\kappa)|^2 = \frac{c}{2\pi} n_I k_I'' |\mathcal{E}_0(\kappa)|^2 < 0$$

ε'' ist bei Absorption immer negativ. Die Absorptionsenergie ist dem Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten bzw. dem Imaginärteil des Wellenvektors direkt proportional. Die Moden laufen in z-Richtung, die Radial- und die Winkelabhängigkeiten sind für beliebiges z gleich, daher ergibt sich die effektive Energieänderung an jeder Stelle zu

$$\Delta S = \frac{d\gamma}{dz} = \frac{c}{2\pi} n_I k_z'' |\mathcal{E}_0(\kappa)|^2 < 0$$

Damit können die Aussagen über den Energieaustausch zwischen Rezeptor und Umgebung gemacht werden. Die Energieänderung ist gleich dem Energiezufluß oder -abfluß minus der absorbierten Energie. $\Delta S = S_{ex} + S_{abs}$

Die Austauschenergie fließt immer von dem Bereich mit geringerer Dämpfung in den mit der größeren, im vorliegenden Fall also aus der Umgebung in den Rezeptor. Der auftretende Dämpfungsfaktor einer Mode liegt infolge dieses Energieaustausches größenmäßig zwischen den Dämpfungsfaktoren der 2 Medien ($|k_I''| \geq |k_z'' = \kappa_{lm}''| \geq |k_{II}''|$).

Mit Hilfe obiger Energiegleichung können relative Angaben über die Größe der Austauschenergie gemacht werden, ohne die Feldverteilungen und daraus die Energieverteilungen berechnen zu müssen. Die Größe α_{lm} gibt an, wie groß der Anteil der Austausch- bzw. einströmenden Energie an einer absorbierten Energieeinheit ist. Dies ist gültig an jeder Stelle des Rezeptors, deshalb auch für die gesamte absorbierte bzw. eingeströmte Energie.

$$\alpha_{lm}(p) = \frac{|S_{ex}|}{|S_{abs}|} = 1 - \frac{\kappa_{lm}''(p)}{k_z''(p)} \qquad p = a/\lambda_0, \quad \lambda_0 = c/\nu$$

3.11 Ergebnisse und Diskussion

Untersucht sind die Eigenwerte und das Absorptionsverhalten der Moden, die bei diesem Problem auftreten. Infolge der zweifachen, symmetriebedingten Entartung für $l' = \pm l$ außer $l=0$ ist es ausreichend, die Moden für $l \geq 0$ in Betracht zu ziehen.

Die Ergebnisse der Moden TE_{01} und TM_{01} sind bereits veröffentlicht [RÖHLER und FISCHER 1971].

In Tabelle 3.1 sind die Modeneigenwerte in Abhängigkeit vom Verhältnis $p = a/\lambda_o$ bzw. vom Betrag der Wellenvektoren angegeben. Dabei entspricht der Bereich $0.7 \leq p \leq 1.4$ ungefähr dem Wellenlängenbereich des sichtbaren Lichts bei Benützung der in Abschnitt 2 angegebenen Brechzahlen und des Rezeptorradius von $a = 0.5\mu$. Bei größeren Brechzahldifferenzen bzw. größeren Rezeptorradien spreizt sich der Bereich. Daher sind Eigenwerte für p-Werte zwischen $0.5 \leq p \leq 2.0$ berechnet.

In diesem Bereich treten bis zu 9 Moden auf: TE_{01} und TM_{01} mit nahezu identischen Eigenwerten, sowie HE_{21} haben den cut-off bei $p = 0.88$, HE_{11} als wichtigste Mode existiert immer, EH_{11}, HE_{12} und HE_{31} haben den cut-off bei $p = 1.41$, EH_{21} und HE_{41} bei $p = 1.89$ (Die Nomenklatur der Moden ist wie üblich aus der Elektrotechnik übernommen).

Die Realteile der Modeneigenwerte ändern sich kaum gegenüber dem Problem ohne Dämpfung, die Feldverteilungen bleiben betragsmäßig ebenfalls ungefähr gleich, ansonsten erhalten die Felder zusätzlich Phasen, weiter kommt es im Bereich II zu quergedämpften Schwingungen in radialer Richtung (entsprechend dem Funktionsverlauf der Hankelfunktion $H_\ell^{(2)}(k_T^{II}\rho)$, k_T^{II} ist komplex), während es im dämpfungsfreien Fall einen monotonen, näherungsweise exponentiellen Abfall gibt (entsprechend dem Funktionsverlauf der modifizierten Hankelfunktion $K_\ell^{(2)}(-ik_T^{II}\rho)$, da jetzt k_T^{II} rein imaginär ist, und $H_\ell^{(2)}(k_T^{II}\rho)$ übergeht in $K_\ell^{(2)}(-ik_T^{II}\rho)$.

$p = a/\lambda_0$	0.5	1.0	1.5	2.0	
k_I k_{II}	4.424 - i·0.009 4.210	8.847 - i·0.018 8.419	13.27 - i·0.027 12.63	17.69 - i·0.035 16.84	cut-off
$K_{TE_{01}}$	-	8.456 - i·0.010	12.92 - i·0.023	17.39 - i·0.034	0.88
$K_{HE_{11}}$	4.243 - i·0.004	8.674 - i·0.016	13.13 - i·0.026	17.57 - i·0.035	0
$K_{EH_{11}}$	-	-	12.67 - i·0.020	17.17 - i·0.034	1.41
$K_{HE_{12}}$	-	-	12.64 - i·0.018	17.10 - i·0.027	1.41
$K_{HE_{21}}$	-	8.451 - i·0.009	12.92 - i·0.026	17.40 - i·0.034	0.88
$K_{EH_{21}}$	-	-	-	16.90 - i·0.027	1.89
$K_{HE_{31}}$	-	-	12.67 - i·0.020	17.17 - i·0.034	1.41
$K_{HE_{41}}$	-	-	-	16.89 - i·0.026	1.89

Tab. 3.1

Verhältnis von einströmender zu absorbierter Energie

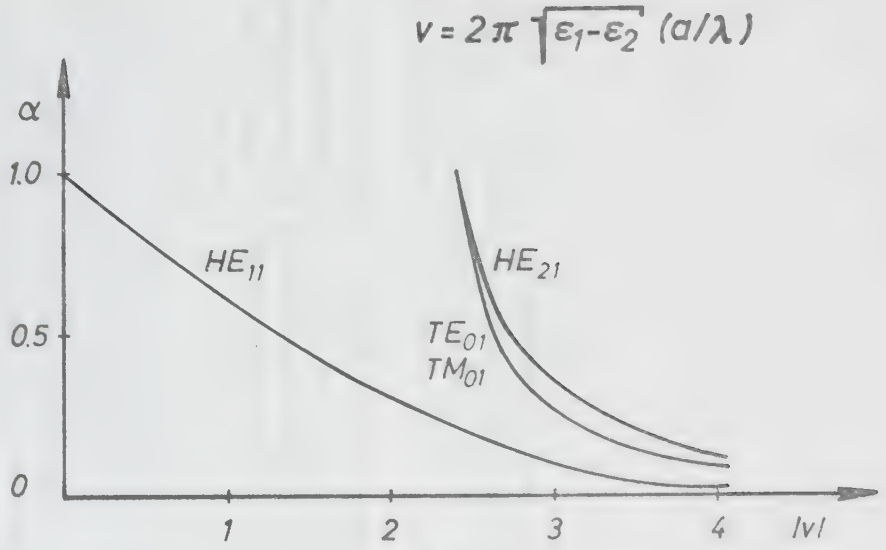


Abb. 3.1

Was neu hinzukommt, ist eine Dämpfung der Zylinderwellen in der Ausbreitungsrichtung z. Die Moden haben im Gegensatz zu unendlichen ebenen Wellen (siehe Abschnitt 3.2) einen begrenzten Energieinhalt und werden deshalb durch das absorbierende Medium entlang der Ausbreitungsrichtung exponentiell geschwächt. Den Dämpfungsgrad gibt der Imaginärteil der z-Komponente des Wellenvektors an.

Damit kann das Verhältnis von Austausch- zu Absorptionsenergie einer Mode $\alpha_{\ell m} = S_{ex} / S_{abs}$ bestimmt werden. In Abb. 3.1 sind die Verhältnisse für die 4 wichtigsten Moden aufgetragen. Als Abszisse dient hierbei eine normierte Frequenz $v = 2\pi\sqrt{\epsilon_I - \epsilon_{II}}\; a/\lambda_0$, die zwar nicht so transparent ist wie p, dafür viel allgemeinere Aussagen zuläßt, weil die Brechzahlen in die Variable mit eingehen. Der Bereich des sichtbaren Lichts liegt für dieses Modell bei $1.9 \leq |v| \leq 3.8$

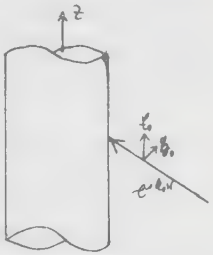
Es zeigt sich, daß bei der cut-off Frequenz für alle Moden $\alpha_{\ell m} = 1$ wird, d.h., die im Kern absorbierte Energie wird voll aus der Umgebung nachgeliefert. Die cut-off Punkte sind im Anregungsfalle ohne große Bedeutung (die Anregungsenergie ist hier noch verschwindend). Die Anregung der Eigenfunktionen wird im Abschnitt 3.3 behandelt.

Der Photorezeptor absorbiert zum Teil wesentlich mehr Energie als nach einer geometrisch optischen Betrachtungsweise zu erwarten gewesen wäre. Er hat einen besseren Wirkungsgrad. Diese Art Trichterwirkung (Einziehen von Energie oder "funnelling") wurde bereits auf Grund von Absorptions- und Konzentrationsmessungen in der Netzhaut vorhergesagt [PIRENNE 1962]. Bislang wurden aber keine histologischen Beweise für eine Strukturierung in der Netzhaut gefunden, die ein solches funnelling bewirken würde. Es handelt sich hierbei um einen wellentheoretischen Effekt, der die bisherige Bedeutung der Wellenleitermoden noch verstärkt.

3.2 Die Anregung eines unendlichen Rezeptors

Nachdem die Eigenschaften der Wellenleitermoden in absorbierenden Photorezeptoren untersucht sind, wird in diesem Abschnitt die Anregung durch Licht behandelt.

Der vorerst unendliche Zylinder (absorbierendes Verhalten ist beschrieben durch komplexe Dielektrizitätskonstante) wird von einer ebenen elektromagnetischen Welle angeregt.



$\vec{E}_{anr} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}_0\vec{r}}$ $\qquad$ $\vec{B}_{anr} = \vec{B}_0 e^{i\vec{k}_0\vec{r}}$

$|\vec{k}_0| = \frac{\omega n_{II}}{c}$ ist die Wellenzahl der anregenden Welle im Außenbereich.

Die ebene Welle ist eine zulässige Näherung für die in Wirklichkeit in der Netzhaut auftretenden Wellen. Dies sind, bedingt durch den optischen Apparat des Auges, vornehmlich Kugelwellen, deren Kaustikquerschnitt ein Mehrfaches des Rezeptorradius ist.

Was interessiert, ist wie bei der Behandlung der Wellenleitermoden weniger die Feldverteilung, als vielmehr die Energiebilanz, nämlich wieviel der Anregungsenergie im Rezeptor absorbiert bzw. an der Rezeptoroberfläche gestreut wird.

Für die elektromagnetische Schwingungsdifferentialgleichung erhält man auf Grund der Zylindersymmetrie diesselben Lösungsansätze wie im Fall ohne Anregung.

Die Stetigkeitsbedingungen lauten hier: $(\rho = a)$

$$E_z^I = E_z^{II} + E_z^{anr}, \quad H_z^I = H_z^{II} + H_z^{anr}, \quad E_\varphi^I = E_\varphi^{II} + E_\varphi^{anr}, \quad H_\varphi^I = H_\varphi^{II} + H_\varphi^{anr}$$

Durch die anregende Welle treten im Bereich II feste Anteile auf ($E_z^{anr}, H_z^{anr}, E_\varphi^{anr}, H_\varphi^{anr}$), die nicht von den zu bestimmenden Koeffizienten $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$ abhängen. Auf Grund dieser Inhomogenitäten liegt kein Eigenwertproblem mehr vor, sondern die Richtungskomponenten des Wellenvektors sind durch die anregende Welle eindeutig festgelegt.

Man hat somit ein inhomogenes Gleichungssystem (linear und vom Rang 4) zu lösen. Dabei bleibt der homogene Anteil, d.h., die Koeffizientenmatrix gegenüber dem Eigenwertproblem unverändert. Der inhomogene Anteil muß nun ebenfalls in Zylinderkoordinaten dargestellt werden.

Dazu wird folgende Beziehung verwandt:

$$e^{i k_0 r} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_\ell(k_{0\rho}\rho)\, e^{i\ell\varphi}\, e^{i k_{0z} z}$$

Dabei sind $k_{0x} = 0$, $k_{0\rho} = k_{0y}$, $k_{0\rho}^2 + k_{0z}^2 = k_0^2$

Die Amplituden der anregenden Welle $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{H}_0$ werden in E_s, H_s (Komponenten senkrecht zur Einfallsebene und E_p, H_p (Komponenten parallel zur Einfallsebene) zerlegt.
Die Einfallsrichtung wird zweckmäßig so gelegt, daß

$$\mathfrak{E}_0 = \begin{pmatrix} E_x^{anr} \\ E_y^{anr} \\ E_z^{anr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s \\ E_p \cos\vartheta \\ E_p \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

in Zylinderkoordinaten

$$\mathfrak{E}_0 = \begin{pmatrix} -E_s \sin\varphi + E_p \cos\vartheta \cos\varphi \\ E_s \cos\varphi + E_p \cos\vartheta \sin\varphi \\ E_p \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

φ ist der Azimutwinkel
ϑ ist der Winkel gegen die z-Achse ($\vartheta = 0 \parallel$ zur z-Achse)

$$\mathfrak{H}_0 = n_{II} \begin{pmatrix} -E_p \sin\varphi - E_s \cos\vartheta \cos\varphi \\ E_p \cos\varphi - E_s \cos\vartheta \sin\varphi \\ E_s \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Die vier Inhomogenitäten haben demzufolge folgendes Aussehen:

$$E_z^{anr} = E_p \sin\vartheta\, e^{-ik_z z} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_\ell(k_\varrho \varrho)\, e^{-i\ell\varphi}$$

$$H_z^{anr} = n_{II} E_s \sin\vartheta\, e^{-ik_z z} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_\ell(k_\varrho \varrho)\, e^{-i\ell\varphi}$$

$$E_\varphi^{anr} = e^{-ik_z z}\left[-E_s \sum_\ell \mathcal{J}_\ell(k_\varrho\varrho) \sin\varphi\, e^{-i\ell\varphi} + E_p \cos\vartheta \sum_\ell \mathcal{J}_\ell(k_\varrho\varrho) \cos\varphi\, e^{-i\ell\varphi}\right]$$

$$H_\varphi^{anr} = n_{II} e^{-ik_z z}\left[-E_p \sum_\ell \mathcal{J}_\ell(k_\varrho\varrho) \sin\varphi\, e^{-i\ell\varphi} - E_s \cos\vartheta \sum_\ell \mathcal{J}_\ell(k_\varrho\varrho) \cos\varphi\, e^{-i\ell\varphi}\right]$$

Unter Verwendung der Beziehungen

$$\sin\varphi\, e^{-i\ell\varphi} = \frac{1}{2i}\left[e^{+i(\ell+1)\varphi} - e^{+i(\ell-1)\varphi}\right] \;;\quad \cos\varphi\, e^{-i\ell\varphi} = \frac{1}{2}\left[e^{+i(\ell+1)\varphi} + e^{+i(\ell-1)\varphi}\right]$$

und der Indizesverschiebungen (zulässig, da die Summe von $\ell=-\infty$ bis $\ell=\infty$ geht)

$$\mathcal{J}_\ell\, e^{-i(\ell+1)\varphi} \to \mathcal{J}_{\ell-1}\, e^{-i\ell\varphi} \qquad \mathcal{J}_\ell\, e^{-i(\ell-1)\varphi} \to \mathcal{J}_{\ell+1}\, e^{-i\ell\varphi}$$

erhält man für alle Glieder des Gleichungssystems gleiche Abhängigkeit im Azimut und kann somit den Term $e^{-i\ell\varphi}$ (ebenso wie $e^{-ik_z z}$) bei der Berechnung der Koeffizienten unberücksichtigt lassen.

Diese Umwandlungen wirken sich nur auf E_φ^{anr} und H_φ^{anr} aus und zwar folgendermaßen

$$E_\varphi^{anr} = e^{-ik_z z} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-i\ell\varphi}\left[iE_s\left(\mathcal{J}_{\ell-1}(k_\varrho\varrho) - \frac{\ell}{k_\varrho\varrho}\mathcal{J}_\ell(k_\varrho\varrho)\right) + E_p \cos\vartheta \frac{\ell}{k_\varrho\varrho}\mathcal{J}_\ell(k_\varrho\varrho)\right]$$

$$H_\varphi^{anr} = n_{II} e^{-ik_z z} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-i\ell\varphi}\left[iE_p\left(\mathcal{J}_{\ell-1}(k_\varrho\varrho) - \frac{\ell}{k_\varrho\varrho}\mathcal{J}_\ell(k_\varrho\varrho)\right) - E_s \cos\vartheta \frac{\ell}{k_\varrho\varrho}\mathcal{J}_\ell(k_\varrho\varrho)\right]$$

Das nun vorliegende lineare Gleichungssystem wird numerisch mit Hilfe des Gaußverfahrens gelöst. Man erhält dann die zur Energiebetrachtung notwendigen Koeffizienten $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$.

Die Energiebetrachtung wird an der idealisierten Grenzschicht zwischen Zylinder und Umgebung vorgenommen. Von der ankommenden Energie wird ein Teil an der Grenzfläche reflektiert, der Rest dringt ein, wird absorbiert oder verläßt den Zylinder phasenverschoben wieder. Um die absorbierte Energie zu erhalten, wird der Energiefluß über die Zylinderoberfläche

integriert. Dadurch hebt sich der wieder ausströmende, phasenverschobene Anteil wieder weg und es bleibt der absorbierte Anteil übrig.

Zur Beschreibung des Energieflusses wird der Poyntingvektor benutzt, und zwar gibt die Radialkomponente des Poyntingvektors den Fluß durch die Grenzfläche wieder.

Radialkomponente $\gamma_\rho = \frac{c}{4\pi}\left(E_\varphi H_z^* - E_z H_\varphi^*\right)$

Dabei sind $E_\varphi = \frac{i}{k_\rho^2}\left(\frac{k_z}{\rho} E_{z/\varphi} - \frac{\omega\mu}{c} H_{z/\rho}\right)$

$H_\varphi = \frac{i}{k_\rho^2}\left(\frac{\omega\varepsilon}{c} E_{z/\rho} + \frac{k_z}{\rho} H_{z/\varphi}\right)$

Dadurch wird

$$\gamma_\rho = \frac{ic}{4\pi k_\rho^2}\left[\left(\frac{k_z}{\rho} E_{z/\varphi} - \frac{\omega\mu}{c} H_{z/\rho}\right) H_z^* - E_z\left(\frac{\omega\varepsilon}{c} E_{z/\rho} + \frac{k_z}{\rho} H_{z/\varphi}\right)^*\right]$$

Da $E_{z/\varphi} H_z^* - E_z H_{z/\varphi}^* = 0$ vereinfacht sich γ_ρ zu

$$\gamma_\rho = -\frac{i\omega}{4\pi k_\rho^2}\left(\mu H_{z/\rho} H_z^* + \varepsilon E_z E_{z/\rho}^*\right)$$

Die im Zylinder in der Schicht dz absorbierte Energie wird nun zu

$$\hat{S}_{abs} = Re\int_0^{2\pi} \gamma_\rho^I \, a\, d\varphi = -\frac{a\omega}{2 k_\rho^{I\,2}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} Re\left[i\left(|B_\ell|^2 \mathfrak{J}_\ell' \mathfrak{J}_\ell^* + \varepsilon |A_\ell|^2 \mathfrak{J}_\ell \mathfrak{J}_\ell'^*\right)\right]$$

$$= -\frac{ac}{2} Re\left[i \frac{k_I}{k_\rho^{I\,2}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{n_I}|B_\ell|^2 \mathfrak{J}_\ell' \mathfrak{J}_\ell^* + n_I |A_\ell|^2 \mathfrak{J}_\ell \mathfrak{J}_\ell'^*\right)\right]$$

unter Berücksichtigung von $\mathfrak{J}_\ell' = + \frac{\ell}{\rho}\mathfrak{J}_\ell - k_\rho \mathfrak{J}_{\ell+1}$, $\mathfrak{J}_\ell' = \frac{d\,\mathfrak{J}(k_\rho)}{d\rho}$

und $Re\,(i\,\mathfrak{J}_\ell \mathfrak{J}_\ell^*) = 0$

wird

$$\hat{S}_{abs} = \frac{ac}{2} Re\left[i \frac{k_I}{k_\rho^{I\,2}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{n_I}|B_\ell|^2 \mathfrak{J}_{\ell+1} \mathfrak{J}_\ell^* + n_I |A_\ell|^2 \mathfrak{J}_\ell \mathfrak{J}_{\ell+1}^*\right)\right]$$

Im Bereich II überlagern sich die anregenden Felder und die Streufelder $\widetilde{E_z^{II}} = E_z^{anr} + E_z^{II}$, $\widetilde{H_z^{II}} = H_z^{anr} + H_z^{II}$

$$\widetilde{E_z^{II}} = \left(C_\ell H_\ell^{(2)}(k_{\rho}\rho) + E_p \sin\vartheta\, \mathcal{J}_\ell(k_{\rho}\rho) \right) e^{i\ell\varphi}\, e^{ik_z z}$$

$$\widetilde{H_z^{II}} = \left(D_\ell H_\ell^{(2)}(k_{\rho}\rho) + n_{II} E_s \sin\vartheta\, \mathcal{J}_\ell(k_{\rho}\rho) \right) e^{i\ell\varphi}\, e^{ik_z z}$$

Danach werden

$$\widetilde{E_\varphi^{II}} = \left[\frac{i}{k_\rho^2} \left(\frac{k_z}{\rho} i\ell C_\ell H_\ell - \frac{k_\rho^{II} k_{II}}{n_{II}} D_\ell H_\ell' \right) - i E_s \mathcal{J}_\ell' - E_p \cos\vartheta \frac{\ell}{k_\rho \rho} \mathcal{J}_\ell \right] e^{i\ell\varphi}\, e^{ik_z z}$$

$$\widetilde{H_\varphi^{II}} = \left[\frac{i}{k_\rho^2} \left(k_{II} k_\rho^{II} C_\ell H_\ell' + \frac{k_z}{\rho n_{II}} i\ell D_\ell H_\ell \right) + i E_p \mathcal{J}_\ell' - E_s \cos\vartheta \frac{\ell}{k_\rho \rho} \mathcal{J}_\ell \right] e^{i\ell\varphi}\, e^{ik_z z}$$

Daraus bestimmt sich $\gamma_\rho^{II} = \frac{c}{4\pi} \left(\widetilde{E_\varphi^{II}}\, \widetilde{H_z^{II}}^* - \widetilde{E_z^{II}}\, \widetilde{H_\varphi^{II}}^* \right)$

weiter wird der gesamte Energiefluß an der Grenzfläche $\rho = a$

$$\hat{S}_{II} = Re \int_0^{2\pi} \gamma_\rho^{II}\, a\, d\varphi = \hat{S}_0 + \hat{S}_{refl} + S_{intrinsic}$$

Bei dieser Aufspaltung von $\hat{S}_{II}$ handelt es sich um eine sinnvolle Zusammenfassung der diversen Flußterme

$$\hat{S}_0 = \frac{ac}{2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} Re \left[i n_{II} \sin\vartheta \left(|E_p|^2 \mathcal{J}_\ell'^* \mathcal{J}_\ell - |E_s|^2 \mathcal{J}_\ell' \mathcal{J}_\ell^* \right) \right]$$

$$\hat{S}_{refl} = \frac{ac}{2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} Re \left[i \frac{k_{II}}{n_{II} k_\rho^2 \rho} \left(|C_\ell|^2 |\varepsilon_{II}|\, H_\ell H_\ell'^* - |D_\ell|^2 H_\ell' H_\ell^* \right) \right]$$

$$\hat{S}_{intr} = \frac{ac}{2} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} Re \left[i n_{II} \left(E_p^* C_\ell H_\ell \mathcal{J}_\ell'^* + E_p C_\ell^* H_\ell'^* \mathcal{J}_\ell \right) - i \left(E_s D_\ell^* \mathcal{J}_\ell' H_\ell^* + E_s^* D_\ell H_\ell' \mathcal{J}_\ell^* \right) \right]$$

Aus Stetigkeitsgründen (bzw. aus Gründen der Energieerhaltung) gilt an der Oberfläche

$$\gamma_\rho^{I}(\rho = a) = \gamma_\rho^{II}(\rho = a)$$

Daraus folgt $\hat{S}_{abs} = \hat{S}_0 + \hat{S}_{refl} + \hat{S}_{intr}$

Nimmt man für den Bereich II ein reelles ε_{II} an, dann wird $\hat{S}_o = 0$, d.h., die anregende Welle selbst bleibt ungedämpft. Die auf den Zylinder einströmende Energie $\hat{S}_{intr}$, die herrührt von der Überlagerung der anregenden und der erzwungenen Wellen, wird an der Grenzschicht zum Teil reflektiert $\hat{S}_{refl}$, zum Teil im Zylinder absorbiert $\hat{S}_{abs}$.

$$\hat{S}_{abs} = \hat{S}_{refl} + S_{intr}$$

$\hat{S}_{refl}$ ist dabei negativ.

(Von den drei Energiegrößen brauchen auf Grund dieser Beziehung nur zwei berechnet zu werden, doch empfiehlt es sich, die dritte aus Kontrollgründen auch direkt numerisch zu bestimmen).

Es interessieren nun $\hat{S}_{abs}$ und $\hat{S}_{refl}$ in Abhängigkeit vom Einfallswinkel ϑ der anregenden Welle, von der Polarisationsebene (durch E_p und E_s ausgedrückt), vom Absorptionskoeffizienten ε_I'' des Mediums und von der Wellenlänge λ der einfallenden Welle (genauer vom Verhältnis Rezeptorradius a/ Wellenlänge λ).

Bei der in diesem Modell vorgegebenen Art von Anregung entsteht pro l-Wert eine Mode, die ungedämpft den Zylinder durchläuft, da die im Rezeptor absorbierte Energie gleichermaßen von außen nachgeliefert wird. Es handelt sich bei diesen Moden nicht um Eigenfunktionen, vielmehr sind es erzwungene Schwingungen, deren Charakter völlig durch die anregende Welle geprägt wird. Um den "Modeneffekt" abschätzen zu können, wird Bezug genommen auf die Dämpfung einer ebenen Welle. Dies geschieht in einer Störungsrechnung erster Ordnung (der Rezeptor wird als kleine Störung betrachtet $k_I'' a \ll 1$, die Amplituden der ebenen Welle bleiben demnach konstant).

Die Divergenz des Poyntingvektors ist dann

$$S_{ebW} = \frac{c}{4\pi} \, div\left(\vec{E} \times \vec{H}^{*}\right) = -\frac{c}{2\pi} n_I k_I'' e^{-2 k_I'' \kappa} \left|\vec{E}_0\right|^2$$

Die Näherung $k_I'' a \ll 1$ ergibt $e^{-2 k_I'' \kappa} \approx 1$

Danach wird die absorbierte Energie einer ebenen Welle in einem Volumstück der Größe πa^2 (Die Höhe $\Delta z = 1$)

$$\hat{S}_{ebW} = Re\left(\pi a^2 S_{ebW}\right) = \frac{c a^2}{2} n_I' k_I'' \left|\vec{E}_0\right|^2$$

und die relative Absorption in einem Zylinder

$$\alpha_T = \hat{S}_{abs} / \hat{S}_{ebW}$$

Um den Modeneffekt zu ersehen, muß bei $\hat{S}_{ebW}$ eine Brechung an der Zylinderoberfläche berücksichtigt werden.

$$\hat{S}_{ebW}^{T} = \frac{c a^2}{2} n_I' k_I'' \left(\left| E_p \frac{n_{II}}{n_I} \frac{2 \sin \vartheta'}{\sin \vartheta' + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_I} \cos^2 \vartheta'}} \right|^2 + \left| E_s \frac{2 \sin \vartheta'}{\sin \vartheta' + \sqrt{\frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{II}} - \cos^2 \vartheta'}} \right|^2 \right)$$

Dabei ist der mittlere Einfallswinkel $\vartheta' = \vartheta / 2$

Somit wird unter Annahme von Brechung ebener Wellen die relative Absorption

$$\alpha_T^{T} = \hat{S}_{abs} / \hat{S}_{ebW}^{T}$$

3.21 Ergebnisse und Diskussion

Die Berechnungen sind für 3 verschiedene Dämpfungsgrade und p = 1.0 durchgeführt. Dabei ist die jeweilige Brechzahl

$$n_I = 1.408 \, e^{i \varphi_m} \qquad m = 1,2,3$$

$$\varphi_1 = 0.001 \, , \quad \varphi_2 = 0.002 \, , \quad \varphi_3 = 0.003$$

Die Ergebnisse werden aufgeführt für die einzelnen Moden

sowie für das gesamte elektromagnetische Feld in Abhängigkeit des Einfallswinkels $0° \leq \vartheta \leq 10°$ und der Polarisierung der anregenden ebenen Wellen.

Aus den Abbildungen 3.2 bis 3.4 sind die relativen Absorptionsenergien α_r^l für l = 0,1,2,3 und m = 1,2,3 zu ersehen. Die verschiedenen Dämpfungen ziehen nur geringe Unterschiede der relativen Absorptionsenergien α_r^l nach sich, da sie sowohl in $\hat{S}_{abs}$ als auch in $\hat{S}_{ebw}$ gleichermaßen eingehen. Das wichtigste Resultat ist jedoch, daß die Moden für l=1 bzw. l=-1 auch bei $\vartheta = 0$ einen Absorptionsbeitrag liefern. $\vartheta = 0$ bedeutet, daß die anregende ebene Welle genau in z-Richtung läuft. Die Wellen für $|l| \geq 3$ leisten keinen merklichen Beitrag mehr.

In den Abbildungen 3.5 bis 3.7 sind die relativen Reflektionsenergien gezeigt. Sie sind deswegen sehr viel höher, weil sie ebenfalls auf $\hat{S}_{ebw}$ bezogen sind. Daher rührt auch die starke Abhängigkeit von φ_m, zumal $\hat{S}_{refl}$ nahezu unabhängig von φ_m ist.

In Abb. 3.8 wird die relative Gesamtenergie dargestellt.

$$\alpha_r = \sum_{l=-l_n}^{l_n} \alpha_r^l \qquad l_n = 10$$

Dabei ist $\alpha_r^l = \alpha_r^{-l}$, also liegt bei Anregung mit ebenen Wellen ebenfalls Entartung vor. Im Schaubild entsprechen die ausgezogenen Kurven der Anregung durch senkrecht zur Einfallsebene polarisiertem Licht, die gestrichelten der von parallel polarisiertem. Die relativen Energiewerte sind dabei etwas größer für kleinere Absorptionskoeffizienten. Demnach sind jeweils die höher liegenden Kurven für m=1, die tiefer liegenden für m=3. Die Unterschiede sind allerdings zu gering, als daß sich daraus physikalische Schlüsse ziehen ließen.

Wichtig sind zwei Eigenschaften, zum einen liegt bereits für $\vartheta = 0$ eine Absorption vor (herrührend von den Moden

$l = \pm 1$), zum andern wird die jeweils absorbierte Energie sofort vollkommen aus der Umgebung nachgeliefert, da die Anregung permanent erfolgt längs der gesamten Rezeptoroberfläche. Dadurch kommt der Einziehungseffekt (funnelling) der Moden viel stärker zur Wirkung, so daß bei ungefähr $\vartheta = 3°$ gleich viel absorbiert wird wie bei der Absorption einer ebenen Welle in erster Näherung, bei $\vartheta = 10°$ bereits das 2 1/2 fache. Bei noch größeren Einfallswinkeln gewinnen die Moden mit größerem l relativ an Bedeutung, insgesamt steigt α_T noch auf ungefähr 5.

Die komplizierte transzendente Abhängigkeit, sowie die weitaus größere Absorption bei kleinen Winkeln wird deutlich, wenn man $\hat{S}_{abs}$ und $\hat{S}^T_{ebW}$ vergleicht (Abb. 3.9).

$\hat{S}^T_{ebW}$ ist für kleine Winkel proportional $\sin \vartheta'$
d.h., $\hat{S}^T_{ebW}(\vartheta'=0) = 0$. Hier wird $\alpha^T_T(\vartheta'=0) = \infty$

Obwohl die Mittelung $\vartheta' = \vartheta/2$ etwas willkürlich ist, ergibt sich als Fazit: eine Näherung mit ebenen Wellen (was nichts anderes ist als eine Tendenz zur geometrischen Optik) wird dem Problem nicht gerecht. Eine funktionsgerechte Beschreibung des Rezeptorabsorptionsmechanismus kann nur mit Hilfe der Zylinderwellen vorgenommen werden.

Es zeigt sich dabei eine sehr starke, transzendente Winkelabhängigkeit der absorbierten Energie. Das ist mit ein Beweis dafür, daß die Ursache für den Stiles-Crawford Effekt eindeutig am optischen Verhalten der Netzhautrezeptoren liegt.

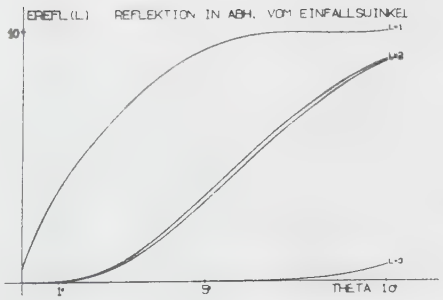


Abb. 3.2

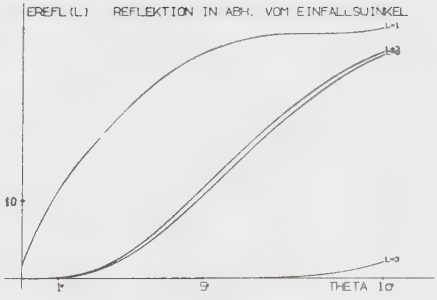


Abb. 3.3

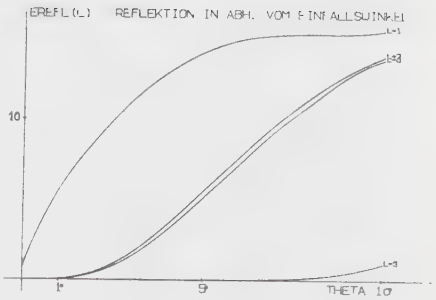


Abb. 3.4

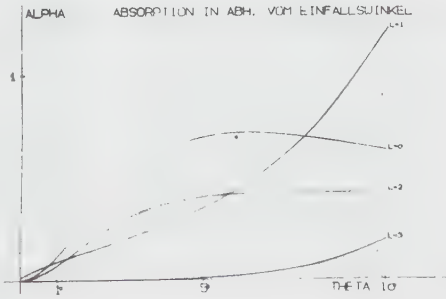


Abb. 3.5

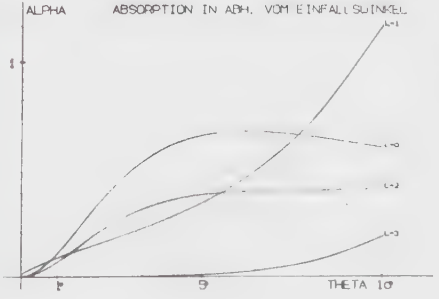


Abb. 3.6

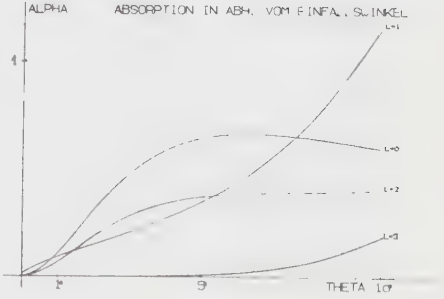


Abb. 3.7

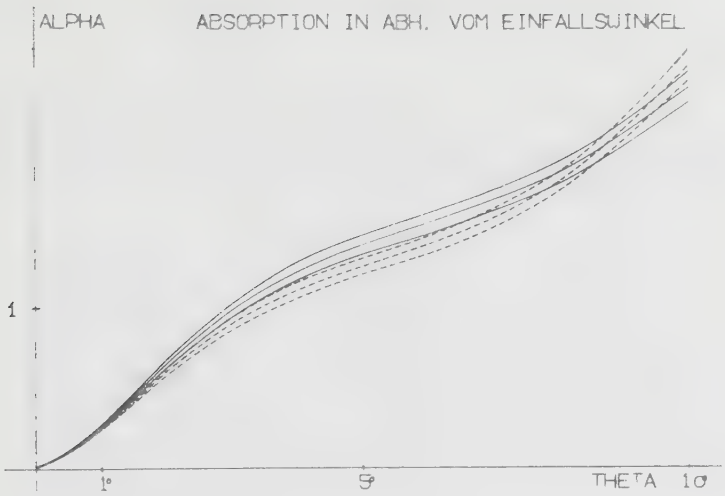

ALPHA
ABSORPTION IN ABH. VOM EINFALLSWINKEL
1
1°
5°
THETA 10°

Abb. 3.8

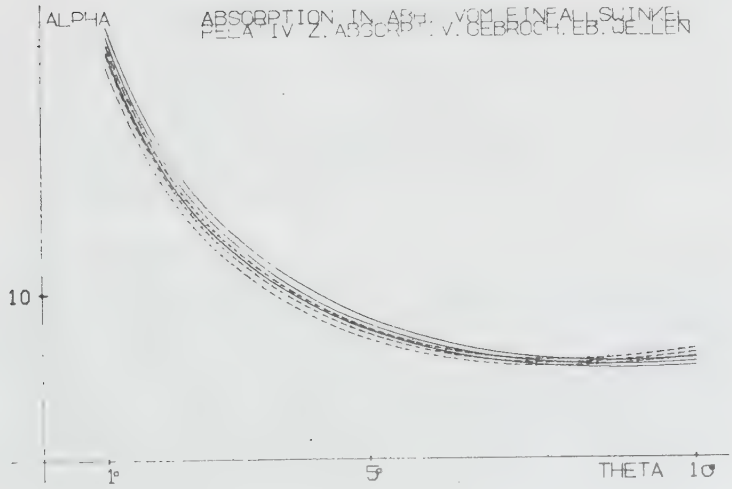
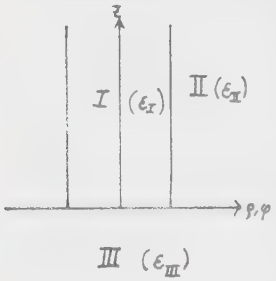

ALPHA
10
1°
5°
THETA 10°

Abb. 3.9

3.3 Die Anregung eines endlichen Rezeptors

Bei der Anregung eines (einseitig) endlichen Rezeptors sind es 3 Bereiche, die verschiedene elektromagnetische Eigenschaften, d.h., verschiedene Brechzahlen haben.

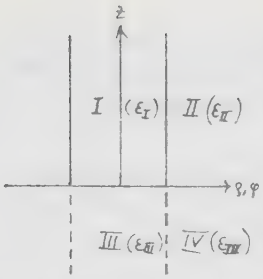


Bereich I stellt das äußere, photosensitive Segment dar, und Bereich II ist die umgebende Schicht. Im Bereich III liegen die inneren Segmente des Rezeptors, die nicht weiter berücksichtigt werden. Hier kommen auch die anregenden Wellen von der Netzhautoberfläche her.

Auf Grund der relativ starken Absorption des äußeren Rezeptorsegments ist die Beeinflussung der Anregung an der Grenzschicht z = 0 durch Reflektion bzw. Refraktion am andern Ende des äußeren Rezeptorsegments bzw. an der Pigmentepithelschicht gering, sodaß das Prinzip von St.Venant derart angewandt werden kann, daß dieses äußere Rezeptorsegment einseitig unendlich angenommen werden kann. Diese Annahme ermöglicht eine Behandlung mit vertretbarem Aufwand, ohne die Resultate merklich zu verfälschen.

In jedem der 3 Bereiche, die alle zylindersymmetrisch bezogen auf die z-Achse sind, haben die allgemeinen Lösungen der Maxwellschen Schwingungsgleichung in Zylinderkoordinaten Gültigkeit. Die Radialanteile sind dabei wiederum identisch mit den Besselfunktionen 1. und 2. Art, da ε und somit k^2 jeweils in einem Bereich konstant sind. Die Auswahl der speziellen Lösungen geschieht durch Verifizieren der verschiedenen Stetigkeitsbedingungen.

Dazu muß der Bereich III in 2 Bereiche (III und IV) ent-



sprechend Bereich I und II aufgeteilt werden. Natürlich haben die Bereiche III und IV dieselbe Brechzahl.

Durch das Zusammentreffen von 3 Medien mit verschiedenem elektromagnetischem Verhalten bei z = 0 und $\rho = a$ und die Annahme von ideal unendlich dünnen Grenzschichten zwischen den 3 Medien (mathematisches Modell) muß entweder die Quellenfreiheit ($div\,\mathfrak{D} = 0$, $div\,\mathfrak{B} = 0$) oder ein Teil der Stetigkeitsbedingungen aufgegeben werden. Um dem auszuweichen, müßte dem physikalischen Sachverhalt entsprechend ein stetiger Obergang der Brechzahlen zwischen den 3 Medien um z = 0, $\rho = a$ hingenommen werden. Dies ergäbe einen nicht zu vertretenden Aufwand an Theorie und Numerik.

Aus physikalischen Gründen wird hier die Quellenfreiheit beibehalten, dafür die Stetigkeit teilweise verletzt, und zwar unserer Problemstellung entsprechend derart, daß die gewünschten Aussagen dadurch nicht verfälscht werden. Exakt durchgeführt werden muß die Energiebetrachtung an den Grenzflächen z = 0 (Anregungsenergie ist gleich Transmissions- plus Reflektionsenergie) und der Energieaustausch zwischen Bereich I und II. Offen gelassen wird der Austausch an reflektierter Energie zwischen III und IV.

Physikalisch äquivalent mit diesen Energiebilanzen sind die Stetigkeitsbedingungen, die folglich zwischen den Bereichen I - III, I - II und III - IV verifiziert werden. Dabei werden die Lösungsansätze aus den allgemeinen Lösungen so kombiniert, daß auf der ganzen Grenzfläche zwischen 2 Bereichen Stetigkeit herrscht, falls sie an einem Punkt erfüllt ist.

In den allgemeinen Lösungen (Abschnitt 3.) ist der Betrag

des Wellenvektors k gegeben durch die Lichtfrequenz ν und die Brechzahl n des jeweiligen Bereichs, seine Richtungseinstellung bzw. seine Komponenten sind variabel. Die Lösung wird nun eine Kombination von Wellen aller möglichen (komplexen) Richtungseinstellungen sein, wobei die Amplituden der Wellen durch die Anregung bestimmt sind. Mit der Variation der Radialkomponente des Wellenvektors $0 \le k_\rho \le \infty$ werden alle möglichen Einstellungen erfaßt. Diese Integrationsdarstellung entspricht einer Hankeltransformation.

Die Lösung für Bereich I lautet

$$E_z^I(\rho,\varphi,z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{i\ell\varphi} \int_0^{\infty} e_\ell^I(k_\rho)\, \mathcal{J}_\ell(k_\rho\rho)\, e^{ik_z z}\, k_\rho\, dk_\rho$$

$$H_z^I(\rho,\varphi,z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{i\ell\varphi} \int_0^{\infty} h_\ell^I(k_\rho)\, \mathcal{J}_\ell(k_\rho\rho)\, e^{ik_z z}\, k_\rho\, dk_\rho$$

für Bereich II unter Berücksichtigung von $k_z^I = k_z^{II} = k_z$

$$E_z^{II}(\rho,\varphi,z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{i\ell\varphi} \int_{k_0^{II}-k_0^I}^{\infty} e_\ell^{II}(k_\rho^I)\, \mathcal{Z}_\ell(k_\rho'\rho)\, e^{ik_z z}\, k_\rho'\, dk_\rho'$$

$$H_z^{II}(\rho,\varphi,z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{i\ell\varphi} \int_{k_0^{II}-k_0^I}^{\infty} h_\ell^{II}(k_\rho^I)\, \mathcal{Z}_\ell(k_\rho'\rho)\, e^{ik_z z}\, k_\rho'\, dk_\rho'$$

Dabei gilt $k_\rho'^2 = k_{II}^2 - k_z^2 = k_{II}^2 - k_I^2 + k_\rho^2$

Die Integrationsgrenzen zwischen Bereich I und II werden vertauscht, falls k_ρ' die unabhängige Variable ist. Das ist der Fall bei Anregung von Bereich IV nach Bereich II.

In den Bereichen III und IV sind die elektromagnetischen Felder eine Superposition vom Feld der Anregung und vom Feld der an z = 0 reflektierten Wellen. Die Lösungsansätze der reflektierten Wellen entsprechen völlig denen von Bereich I und II, allerdings mit anderen z-Komponenten des Wellenvektors

$$k_\rho^{III} = k_\rho^I = k_\rho\,, \quad k_\rho^{IV} = k_\rho^{II} = k_\rho'\,, \quad k_z^{III} = k_{III}^2 - k_\rho^2\,, \quad k_z^{IV} = k_{III}^2 - k_\rho'^2\,, \quad k_z^{IV} \neq k_z^{III}$$

Das Anregungsfeld wird nun in eine entsprechende Form gebracht, d.h., nach obigen Zylinderwellen entwickelt.

$$E^{III}_{zanr}(\rho,\varphi,z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{i\ell\varphi} \int_0^{\infty} e^{III}_{\ell anr}(k_\rho)\, J_\ell(k_\rho\rho)\, e^{-ik_z z}\, k_\rho\, dk_\rho$$

$$H^{III}_{zanr}(\rho,\varphi,z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{i\ell\varphi} \int_0^{\infty} h^{III}_{\ell anr}(k_\rho)\, J_\ell(k_\rho\rho)\, e^{-ik_z z}\, k_\rho\, dk_\rho$$

Dabei sind $e^{III}_{\ell anr}(k_\rho)$ bzw. $h^{III}_{\ell anr}(k_\rho)$ die Hankeltransformierten der Radialanteile von $E^{III}_{zanr}(\rho,\varphi,z)$ bzw. $H^{III}_{zanr}(\rho,\varphi,z)$.

Als anregende Felder werden ebene Wellen herangezogen. Sie erweisen sich bei der vorliegenden Problematik als günstig. Zum einen läßt sich die Hankeltransformation relativ einfach durchführen, zum andern kommt es dem physikalischen Sachverhalt ziemlich nahe. Zwar ist prinzipiell jede Art von anregender Welle zugelassen - vorausgesetzt, sie genügt den Maxwellschen Gleichungen - , doch sind die auf der Netzhaut ankommenden Wellen relativ leicht durch ebene Wellen anzunähern, weiter fallen die Störungen an inneren Segmenten, Nervenfasern, Mitochondrien etc. kaum ins Gewicht, da die Brechzahlunterschiede gering sind.

Mit der Anregung eines nicht absorbierenden, endlichen Rezeptors durch eine senkrecht einfallende (in z-Richtung) ebene Welle beschäftigte sich bereits SNYDER (1966), doch beschränkte er sich auf die Berechnung der Hankeltransformierten. Diese setzte er gleich den Anregungskoeffizienten, ohne Refraktion und Reflektion zu berücksichtigen, was physikalisch natürlich nicht haltbar ist.

Nach Entwicklung der ebenen Welle in Besselfunktionen wie in Abschnitt 3.2 werden die Hankeltransformierten der Anregung

$$e^{III}_{\ell anr}(k_\rho) = E_p \sin\vartheta\, j_\ell(k_\rho) \quad , \quad h^{III}_{\ell anr}(k_\rho) = n_{III}\, E_s \sin\vartheta\, j_\ell(k_\rho)$$

$$e^{III}_{\ell anr}(k_\rho) = E_p \sin\vartheta\, z_\ell(k_\rho) \quad , \quad h^{III}_{\ell anr}(k_\rho) = n_{III}\, E_s \sin\vartheta\, z_\ell(k_\rho)$$

mit den Abkürzungen

$$j_\ell(k_\rho) = \int_0^a \mathcal{J}_\ell(k_{\rho a n r}\rho)\, \mathcal{F}_\ell^*(k_\rho \rho)\, \rho\, d\rho$$

$$z_\ell(k_\rho') = \int_a^\infty \mathcal{J}_\ell(k_{\rho a n r}\rho)\, \mathcal{Z}_\ell^*(k_\rho'\rho)\, \rho\, d\rho$$

$z_\ell(k_\rho')$ ist gleich Null, falls Anregung nur im Bereich III vorliegt.

Zur Verifizierung der Stetigkeitsbedingungen werden außer den z-Komponenten wiederum die φ -Komponenten von $\mathcal{E}(r)$ und $\mathcal{H}(r)$ herangezogen. Dazu sind $E_{\varphi a n r}^{\overline{II},\overline{IV}}$ und $H_{\varphi a n r}^{\overline{II},\overline{IV}}$ in der transformierten Darstellung nötig.

$$E_{\varphi a n r}^{\overline{II}}(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{2}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-i\ell\varphi}\int_0^\infty \Big[\big(i\ell E_\rho \cos\vartheta\big) j_{\ell-1}(k_\rho)\, \mathcal{J}_{\ell-1}(k_\rho \rho) - \big(i\ell E_\rho - E_\rho \cos\vartheta\big) j_{\ell+1}(k_\rho)\, \mathcal{J}_{\ell+1}(k_\rho \rho)\Big] e^{i k_z^{\overline{II}} z}\, k_\rho\, dk_\rho$$

$$H_{\varphi a n r}^{\overline{II}}(\rho,\varphi,z) = \frac{n_{\overline{II}}}{2}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-i\ell\varphi}\int_0^\infty \Big[\big(i E_\rho - E_\rho \cos\vartheta\big) j_{\ell-1}(k_\rho)\, \mathcal{J}_{\ell-1}(k_\rho \rho) - \big(i E_\rho + E_\rho \cos\vartheta\big) j_{\ell+1}(k_\rho)\, \mathcal{J}_{\ell+1}(k_\rho \rho)\Big] e^{i k_z^{\overline{II}} z}\, k_\rho\, dk_\rho$$

Im Bereich IV gilt, falls Anregung nur in Bereich III auftritt, $E_{\varphi a n r}^{\overline{IV}}(\rho,\varphi,z) = 0$, $H_{\varphi a n r}^{\overline{IV}}(\rho,\varphi,z) = 0$

bei unendlich ausgedehnter Anregung dagegen

$$E_{\varphi a n r}^{\overline{IV}}(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{2}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-i\ell\varphi}\int_0^\infty \Big[\big(i\ell E_\rho \cos\vartheta\big) z_{\ell-1}(k_\rho')\, \mathcal{Z}_{\ell-1}(k_\rho' \rho) - \big(i\ell E_\rho - E_\rho \cos\vartheta\big) z_{\ell+1}(k_\rho')\, \mathcal{Z}_{\ell+1}(k_\rho' \rho)\Big] e^{i k_z^{\overline{IV}} z}\, k_\rho'\, dk_\rho'$$

$$H_{\varphi a n r}^{\overline{IV}}(\rho,\varphi,z) = \frac{n_{\overline{IV}}}{2}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-i\ell\varphi}\int_0^\infty \Big[\big(i E_\rho - E_\rho \cos\vartheta\big) z_{\ell-1}(k_\rho')\, \mathcal{Z}_{\ell-1}(k_\rho' \rho) - \big(i E_\rho + E_\rho \cos\vartheta\big) z_{\ell+1}(k_\rho')\, \mathcal{Z}_{\ell+1}(k_\rho' \rho)\Big] e^{i k_z^{\overline{IV}} z}\, k_\rho'\, dk_\rho'$$

Die Lösungsansätze sind nun in der geeigneten Form, sodaß man Stetigkeit an der ganzen Grenzfläche zweier Bereiche erhält, falls sie an einem Punkt erfüllt wird. Die Stetigkeit für variables φ fordert wiederum gleiches ℓ und wird explizit nicht weiter berücksichtigt.

An dem Kreisring ($\rho = a$, z=0) stoßen alle 4 Bereiche zusammen. Deshalb können hier durch Aufstellen der Stetigkeits-

bedingungen Gleichungen zwischen allen 4 Bereichen erhalten werden, ohne z.B. Phasenverschiebungen auf Grund von Laufzeitunterschieden berücksichtigen zu müssen.

Die φ -Komponenten sind immer Tangentialkomponenten, die z-Komponenten nur zwischen I und II, zwischen I/III und II/IV erleidet E_z einen Sprung (H_z nicht, da $\mu = 1$).

Danach lauten die Stetigkeitsbedingungen für $\rho = a$, z = 0:

$$E_\varphi^{III} + E_{\varphi_{anr}}^{III} = E_\varphi^{I} = E_\varphi^{II} = E_\varphi^{IV} + E_{\varphi_{anr}}^{IV}$$

$$H_\varphi^{III} + H_{\varphi_{anr}}^{III} = H_\varphi^{I} = H_\varphi^{II} = H_\varphi^{IV} + H_{\varphi_{anr}}^{IV}$$

$$\varepsilon_{III}\left(E_z^{III} + E_{z\,anr}^{III}\right) = \varepsilon_I E_z^{I} = \varepsilon_I E_z^{II} = \varepsilon_I \frac{\varepsilon_{III}}{\varepsilon_{II}}\left(E_z^{IV} + E_{z\,anr}^{IV}\right)$$

$$H_z^{III} + H_{z\,anr}^{III} = H_z^{I} = H_z^{II} = H_z^{IV} + H_{z\,anr}^{IV}$$

Mit diesen Bedingungen erhält man ein lineares und inhomogenes Gleichungssystem für die 8 Hankeltransformierten. Auf Grund der teilweisen Homogenität und der Verknüpfungen zwischen jeweils 2 Bereichen ist es möglich, das Problem erst für $e_\ell^{III}, h_\ell^{III}, e_\ell^{IV}$ und h_ℓ^{IV} zu lösen, dann daraus $e_\ell^{I}, h_\ell^{I}, e_\ell^{II}$ und h_ℓ^{II} direkt abzuleiten.

Die 4 Inhomogenitäten des Gleichungssystems haben folgende Gestalt

$$\text{I}: \quad -\varepsilon_I E_p \sin\vartheta\, j_\ell(k_1)\, \mathcal{Z}_\ell(z_I) + \varepsilon_I E_p \sin\vartheta\, z_\ell(k_1')\, \mathcal{Z}_\ell(z_{II})$$

$$\text{II}: \quad -n_{II} E_s \sin\vartheta \left(j_\ell(k_1)\, \mathcal{Z}_\ell(z_I) - z_\ell(k_1')\, \mathcal{Z}_\ell(z_{II})\right)$$

$$\text{III}: \quad -\frac{1}{2}\left(i E_s + E_p \cos\vartheta\right)\left(j_{\ell+1}(k_1)\, \mathcal{Z}_\ell(z_I) - z_{\ell+1}(k_1')\, \mathcal{Z}_\ell(z_{II})\right) + \frac{1}{2}\left(i E_s - E_p\right)\left(j_{\ell+1}(k_1)\, \mathcal{Z}_{\ell+1}(z_I) - z_{\ell+1}(k_1')\, \mathcal{Z}_{\ell+1}(z_{II})\right)$$

$$\text{IV}: \quad -\frac{n_{IV}}{2}\left(i E_p - E_s \cos\vartheta\right)\left(j_{\ell+1}(k_I)\, \mathcal{Z}_\ell(z_I) - z_{\ell+1}(k_I')\, \mathcal{Z}_\ell(z_{II})\right) + \frac{n_{III}}{2}\left(i E_p + E_s \cos\vartheta\right)\left(j_{\ell+1}(k_I)\, \mathcal{Z}_{\ell+1}(z_I) - z_{\ell+1}(k_I')\, \mathcal{Z}_{\ell+1}(z_{II})\right)$$

Nach dem Einsetzen der Lösungsansätze in die Stetigkeitsbedingungen erhält man für die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems für $e_\ell^{III}(k_\rho)$, $h_\ell^{III}(k_\rho)$, $e_\ell^{IV}(k_\rho')$ und $h_\ell^{IV}(k_\rho')$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_I \mathcal{J}_\ell(z_I) & 0 & -\varepsilon_I \mathcal{Z}_\ell(z_I) & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_\ell(z_I) & 0 & -\mathcal{Z}_\ell(z_I) \\ \frac{k_z^{III}}{k_\rho z_I}\,\ell\,\mathcal{J}_\ell(z_I) & -\frac{i\omega}{c k_\rho}\mathcal{J}_\ell'(z_I) & -\frac{k_z^{IV}}{k_\rho z_{II}}\,\ell\,\mathcal{Z}_\ell(z_{II}) & \frac{i\omega}{c k_\rho}\mathcal{Z}_\ell'(z_{II}) \\ \frac{i\omega\varepsilon_{III}}{c k_\rho}\mathcal{J}_\ell'(z_I) & \frac{k_z^{III}}{k_\rho z_I}\,\ell\,\mathcal{J}_\ell(z_I) & -\frac{i\omega\varepsilon_{III}}{c k_\rho'}\mathcal{Z}_\ell'(z_{II}) & -\frac{k_z^{IV}}{k_\rho' z_{II}}\,\ell\,\mathcal{Z}_\ell(z_{II}) \end{pmatrix}$$

mit den Abkürzungen $z_I = k_\rho a$ und $z_{II} = k_\rho' a$
Dabei ist berücksichtigt die Reflektionsbedingung $k_z^{III,IV} = -k_{z\,aw}^{III,IV}$

Die Determinante der Matrix hat dieselben Nullstellen wie diejenige in Abschnitt 3.1. Dies folgt aus der Verknüpfung von Bereich III und IV über I und II. Danach müssen dieselben Wellenleitermoden auftreten wie beim homogenen Problem in 3.1.

Nach der Lösung des inhomogenen Gleichungssystems erhält man die restlichen 4 Hankeltransformierten für die interessierenden Bereiche I und II aus den Stetigkeitsbedingungen.

$$e_\ell^I(k_\rho) = \varepsilon_{III}/\varepsilon_I \; e_\ell^{III}(k_\rho) \qquad h_\ell^I(k_\rho) = h_\ell^{III}(k_\rho)$$

$$e_\ell^{II}(k_\rho') = \varepsilon_{IV}/\varepsilon_{II} \; e_\ell^{IV}(k_\rho') \qquad h_\ell^{II}(k_\rho') = h_\ell^{IV}(k_\rho')$$

Die Rücktransformationen entsprechend den Lösungsansätzen ergeben die Gesamtlösung der elektromagnetischen Felder in allen 4 Bereichen. Die Berechnung der Gesamtlösung würde einen sehr hohen numerischen Rechenaufwand erfordern. Deshalb werden nur die für die Absorption beim Einrezeptormodell relevanten Teile der Lösung bestimmt.

Das gesamte elektromagnetische Feld des dielektrischen Zylinders setzt sich bekanntlich zusammen aus den angeregten Moden und einem angeregten Strahlungsfeld. Für die Absorption sind hier nur die Moden von Bedeutung, wogegen die Energie des Ausstrahlungsfeldes in radialer Richtung ausläuft ohne nennenswerte Absorption im Rezeptor. Bei gekoppelten Rezeptoren bzw. bei Rezeptorenfeldern trägt das Ausstrahlungsfeld natürlich zur Absorption in benachbarten Rezeptoren bei. Doch selbst dann sind für den einzelnen Rezeptor seine eigenen Moden dominierend.

Die Aufteilung der Gesamtlösung in Moden einerseits und Ausstrahlungsfeld andererseits erhält man durch Anwendung des Residuensatzes auf die Hankelrücktransformationen. Die singulären Stellen (Pole 1. Grades) der Integranden entsprechen nämlich den Nullstellen der Determinante der Koeffizientenmatrix, also nichts anderem als den Moden. Da aus oben angeführten Gründen das Ausstrahlungsfeld hier nicht weiter untersucht wird, brauchen die Integrationen der Rücktransformationen nicht durchgeführt zu werden. Die Anregung der einzelnen Moden erhält man aus den Residuen

$$A_{\ell m} = 2\pi i \; Res\left[e_\ell^I(k_y) \right]_{k_y = \sqrt{k_z^2 - \varkappa_{\ell m}^2}}$$

bzw. $$B_{\ell m} = 2\pi i \; Res\left[h_\ell^I(k_y) \right]_{k_y = \sqrt{k_z^2 - \varkappa_{\ell m}^2}}$$ für TE_{om}Moden

Die $\varkappa_{\ell m}$ sind die in Abschnitt 3.1 berechneten Modeneigenwerte. Die numerische Berechnung der Residuen ist in Anhang A3 beschrieben.

3.31 Die Anregungsenergien der Moden

Um die Bedeutung der einzelnen Moden untereinander abschätzen zu können, müssen über die Anregungskoeffizienten hinaus die Anregungsenergien der jeweiligen Moden untersucht werden. Diese werden gewonnen durch Integration der z-Komponente des entsprechenden Poyntingvektors $\vec{\gamma}_{lm}$ über die ganze Grenzfläche z = 0. Der Realteil des Integrals gibt die pro Zeiteinheit einströmende Energie S_{lm} an.

$$S_{lm} = Re \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \gamma_{z_{lm}}(\varrho, \varphi, 0)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi$$

Getrennt nach den Bereichen I und II ist $S_{lm} = S_{lm}^{I} + S_{lm}^{II}$

$$S_{lm}^{I} = Re \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \gamma_{z_{lm}}^{I}(\varrho, \varphi, 0)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi \quad \text{und} \quad S_{lm}^{II} = Re \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \gamma_{z_{lm}}^{II}(\varrho, \varphi, 0)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi$$

Dabei ist $\gamma_z = \frac{c}{4\pi}\left(E_\varrho H_\varphi^* - E_\varphi H_\varrho^*\right)$

Die hierbei auftretenden Komponenten des elektromagnetischen Feldes leiten sich wiederum über die Maxwellschen Gleichungen aus den bereits bestimmten z-Komponenten ab.

Danach wird

$$\gamma_z(\varrho, \varphi, 0) = \frac{c}{4\pi |k_z|^4}\left[\frac{k_z \omega \varepsilon^*}{c}\left(\left|E_{z/\varrho}\right|^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left|E_{z/\varphi}\right|^2\right) + \frac{k_z^* \omega}{c}\left(\left|H_{z/\varphi}\right|^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left|H_{z/\varphi}\right|^2\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\omega^2 \varepsilon^*}{c^2}\left(H_{z/\varphi} E_{z/\varrho}^* - H_{z/\varrho} E_{z/\varphi}^*\right) + \frac{|k_z|^2}{\varrho}\left(E_{z/\varrho} H_{z/\varphi}^* - E_{z/\varphi} H_{z/\varrho}^*\right)\right]$$

Für E_z und H_z werden die Felder der Moden eingesetzt, weiter wird $k_z = \varkappa_{lm}$, $k_{\varrho_{lm}}^2 = k_I^2 - \varkappa_{lm}^2$ und $k_{\varrho_{lm}}^{I2} = k_{II}^2 - \varkappa_{lm}^2$

Die Anregungsenergien bestimmen sich dann zu

$$S_{\ell m}^{I} = Re\left[\frac{c}{4|k_{g\ell m}|^2}\left(\frac{\kappa_{\ell m}\omega\varepsilon_I}{c}|A_{\ell m}|^2 + \frac{\kappa_{\ell m}^{*}\omega}{c}|B_{\ell m}|^2\right)\left(I_{\ell-1}^{m} + I_{\ell+1}^{m}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{i\omega^2\varepsilon_I^{*}}{c^2}A_{\ell m}^{*}B_{\ell m} - i\kappa_{\ell m}\kappa_{\ell m}^{*}A_{\ell m}B_{\ell m}^{*}\right)\left(I_{\ell-1}^{m} - I_{\ell+1}^{m}\right)\right]$$

mit $$I_{\ell}^{m} = \int_0^a \mathcal{F}_\ell(k_{g\ell m}\rho)\,\mathcal{F}_\ell^{*}(k_{g\ell m}\rho)\,\rho\,d\rho$$

$$S_{\ell m}^{II} = Re\left[\frac{c}{4|k'_{g\ell m}|^2}\left(\frac{\kappa_{\ell m}\omega\varepsilon_{II}}{c}|C_{\ell m}|^2 + \frac{\kappa_{\ell m}^{*}\omega}{c}|D_{\ell m}|^2\right)\left(K_{\ell-1}^{m} + K_{\ell+1}^{m}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{i\omega^2\varepsilon_{II}^{*}}{c^2}C_{\ell m}^{*}D_{\ell m} - i\kappa_{\ell m}\kappa_{\ell m}^{*}C_{\ell m}D_{\ell m}^{*}\right)\left(K_{\ell-1}^{m} - K_{\ell+1}^{m}\right)\right]$$

mit $$K_{\ell}^{m} = \int_a^\infty \mathcal{Z}_\ell(k'_{g\ell m}\rho)\,\mathcal{Z}_\ell^{*}(k'_{g\ell m}\rho)\,\rho\,d\rho$$

Lediglich die Koeffizienten $A_{\ell m}$ bzw. $B_{\ell m}$ für TE_{0m}Moden sind über die Residuenmethode bestimmt. Die restlichen erhält man viel einfacher aus den Stetigkeitsbedingungen. Danach werden ($z_I = k_{g\ell m}a$, $z_{II} = k'_{g\ell m}a$)

$$C_{\ell m} = \frac{\mathcal{F}_\ell(z_I)}{\mathcal{Z}_\ell(z_{II})}A_{\ell m} \qquad D_{\ell m} = \frac{\mathcal{F}_\ell(z_I)}{\mathcal{Z}_\ell(z_{II})}B_{\ell m}$$

$$B_{\ell m} = i\ell\kappa_{\ell m}\frac{c}{\omega}\left(\frac{1}{z_I^2} - \frac{1}{z_{II}^2}\right)\Big/\left(\frac{\mathcal{F}_\ell'(z_I)}{z_I\,\mathcal{F}_\ell(z_I)} - \frac{\mathcal{Z}_\ell'(z_{II})}{z_{II}\,\mathcal{Z}_\ell(z_{II})}\right)A_{\ell m}$$

Die Anregungsenergien werden bezogen auf die pro Zeiteinheit durch einen Kreisring vom Radius a strömende Energie der anregenden ebenen Welle.

$$\overline{S}_{\ell m} = S_{\ell m}\Big/\left(\frac{c}{4}a^2 n_I\left|\underline{\mathcal{E}}_0\right|^2\right)$$

Interessant ist noch die Summe der Anregungsenergien aller für ein bestimmtes p auftretenden Moden (mit Berücksichtigung der Entartung für positive und negative l).

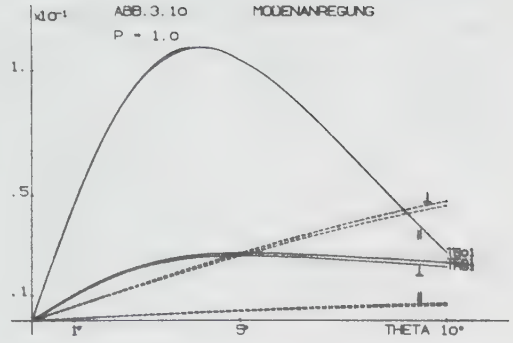
$$S_p = \sum_{\substack{\ell=-\infty \\ m}}^{\infty}\overline{S}_{\ell m} = \sum_{m}\overline{S}_{0m} + 2\sum_{\substack{\ell=1 \\ m}}^{\infty}\overline{S}_{\ell m}$$

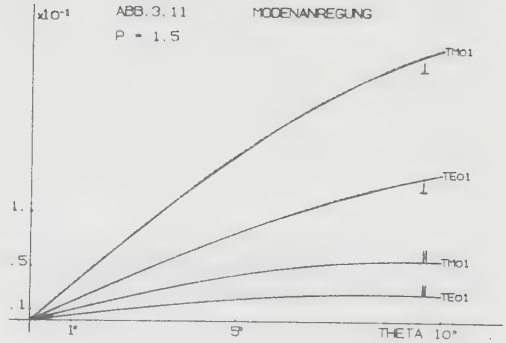
3.32 Ergebnisse und Diskussion

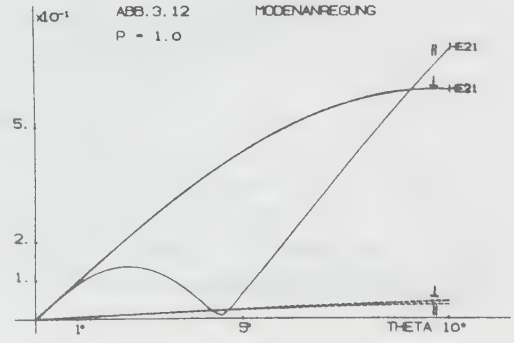
Für die drei p-Werte p = 0.5 (infrarot), p = 1.0 (gelb), p = 1.5 (violett), sowohl für parallele als auch für senkrechte Polarisation der anregenden ebenen Welle unter Variation des Einfallswinkels $0° \leq \vartheta \leq 10°$ sind die Anregungen der auftretenden Moden berechnet. Damit sind die auf der Netzhaut möglichen Einfallswinkel alle erfaßt, abgesehen von Streulicht, das im Auge entstehen kann, hier aber unerheblich ist.

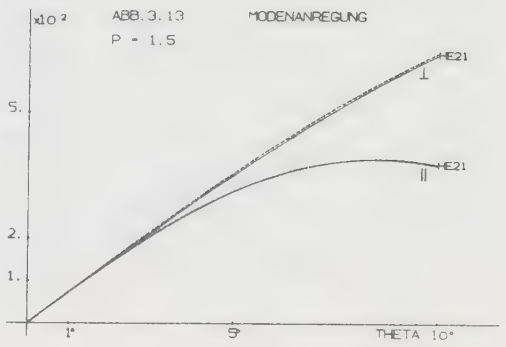
Die Anregung durch die ebenen Wellen mit der Amplitude $|\mathfrak{E}_0| = \sqrt{E_p^2 + E_s^2} = 1$ erfolgt einmal auf der ganzen Fläche $z = 0,\ 0 \leq \varrho \leq \infty$, (Anregung I) - dies entspricht den ausgezogenen Kurven in den Schaubildern-, zum andern findet die Anregung nur auf dem Rezeptorquerschnitt $z = 0,\ 0 \leq \varrho \leq a$ (Anregung II) statt - dargestellt durch die gestrichelten Kurven. Die Zeichen $\perp$ bzw. $\parallel$ bei den Kurven auf den Abbildungen bedeuten Anregung durch senkrecht bzw. parallel polarisierte ebene Wellen. Die Phasenlage der Anregung ist in den Diagrammen nicht berücksichtigt, angegeben sind also die Beträge der Koeffizienten $A_{\ell m}$ bzw. $B_{\ell m}$. Dies ist ausreichend, obwohl nicht wie bei ungedämpften Moden eine exakte Orthogonalität in Bezug auf die Energie herrscht [GOUBAU 1952], doch ist die Nichtorthogonalität (auch gegenüber dem Ausstrahlungsfeld) so gering, daß sie keine Rolle spielt.

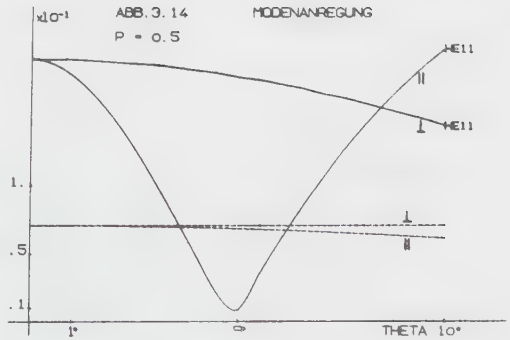
Es zeigt sich eine sehr starke Abhängigkeit von der Polarisationsrichtung der anregenden ebenen Welle. Generell ist zu bemerken, daß die Anregung durch senkrecht polarisiertes Licht effizienter ist und bei Variation des Einfallswinkels langsamer oszilliert.


x10⁻¹
ABB. 3. 10
MODENANREGUNG
P = 1.0
1.
.5
.1
TE01
TM01
1°
5°
THETA 10°


x10⁻¹
ABB. 3. 11
MODENANREGUNG
P = 1.5
TM01
TE01
TM01
TE01
1.
.5
.1
1°
5°
THETA 10°


x10⁻¹
ABB. 3. 12
MODENANREGUNG
P = 1.0
HE21
HE21
5.
2.
1.
1°
5°
THETA 10°


x10⁻²
ABB. 3. 13
MODENANREGUNG
P = 1.5
HE21
HE21
5.
2.
1.
1°
5°
THETA 10°


x10⁻¹
ABB. 3. 14
MODENANREGUNG
P = 0.5
HE11
HE11
1.
.5
.1
1°
9°
THETA 10°

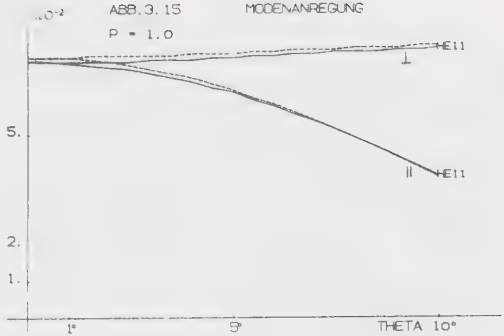
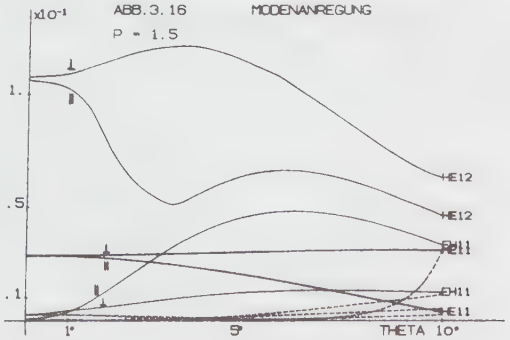


ABB. 3. 15
MODENANREGUNG
P = 1.0
HE11
HE11
5.
2.
1.
1°
9°
THETA 10°


x10⁻¹
ABB. 3. 16
MODENANREGUNG
P = 1.5
1.
.5
.1
HE12
HE12
HE11
EH11
HE11
1°
9°
THETA 10°

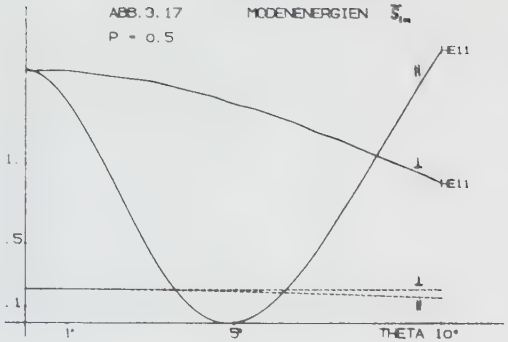


ABB. 3. 17
P = 0.5
MODENENERGIEN $\bar{S}_{l,m}$
HE11
HE11
1.
.5
.1
1°
5°
THETA 10°

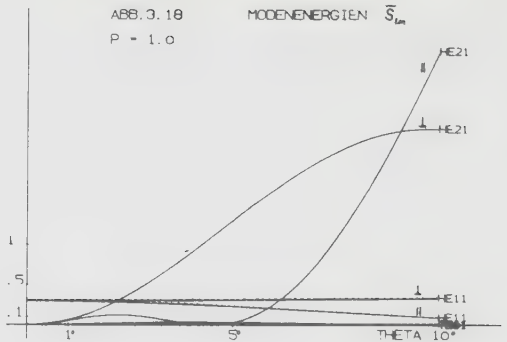
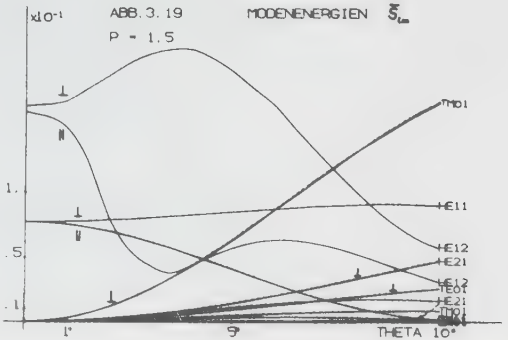


ABB. 3. 18
P = 1.0
MODENENERGIEN $\bar{S}_{l,m}$
HE21
HE21
HE11
HE11
1
.5
.1
1°
5°
THETA 10°


x10⁻¹
ABB. 3. 19
P = 1.5
MODENENERGIEN $\bar{S}_{l,m}$
TM01
HE11
HE12
HE21
HE12
TE01
HE21
TM21
1.
.5
.1
1°
5°
THETA 10°

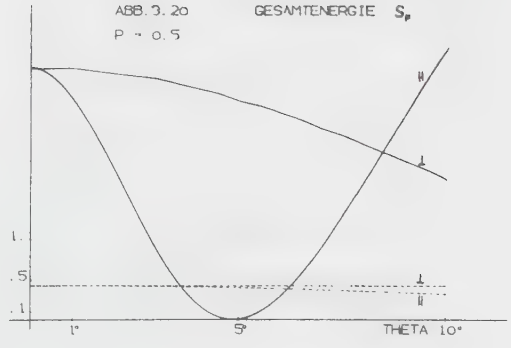


ABB. 3. 20
GESAMTENERGIE S_p
P = 0.5
1.
.5
.1
1°
5°
THETA 10°

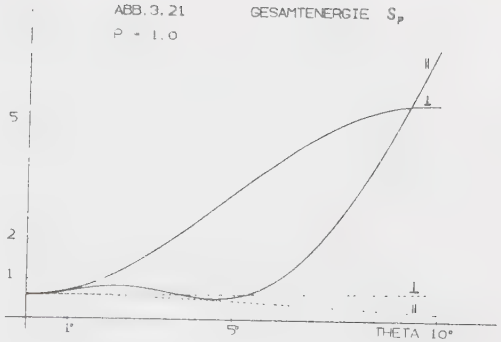
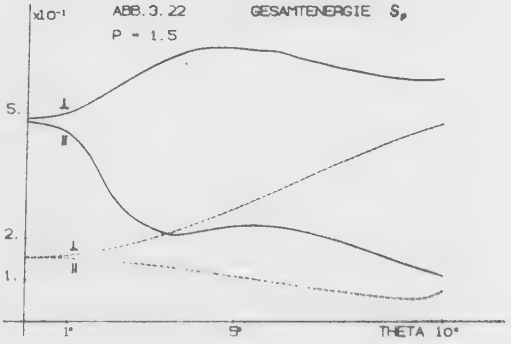


ABB. 3. 21
GESAMTENERGIE S_p
P = 1.0
5
2
1
1°
5°
THETA 10°


x10⁻¹
ABB. 3. 22
GESAMTENERGIE S_p
P = 1.5
5.
2.
1.
1°
5°
THETA 10°

Für steigende Frequenzen, bezogen auf die jeweilige cut-off Frequenz, verliert die Anregung aus dem Bereich IV ($\varrho > a$) immer mehr an Bedeutung. Zum Beispiel ist bei der Mode HE_{11} für p = 0.5 die Anregung I stark verschieden von Der Anregung II, für p = 1.0 sind sie noch um 2-5% verschieden und für p = 1.5 sind sie nahezu identisch.

Dies ist ein sehr bedeutsamer Aspekt. Die Richt- bzw. Empfangscharakteristik der Moden und damit der Rezeptoren ist für kürzere Wellenlängen immer stärker auf die z-Richtung bzw. den direkten Lichteinfall auf dem Rezeptorquerschnitt abgestimmt. Es könnte hieraus ein höheres Auflösungsvermögen oder eine höhere Sehschärfe für kürzerwelliges Licht abgeleitet werden, doch spielen hierzu noch andere Einflußgrößen eine wesentliche Rolle.

Echte Nullstellen der Anregung $|A_{em}|$ oder $|B_{em}|$ für $\vartheta > 0°$ gibt es nicht, lediglich Minima nahe Null, da die Real- und die Imaginärteile von A_{em} bzw. B_{em} nie gleichzeitig Null werden. Dies ist ein Unterschied gegenüber der Anregung von nichtabsorbierenden Zylindern (z.B. Faseroptik) wo durch geeignete Wahl von Wellenlänge (oder Faserdurchmesser), sowie Brechzahldifferenzen, Polarisationsrichtung und Einfallswinkel ganz bestimmte Moden angeregt werden können und andere nicht (durch Auffinden ebendieser Nullstellen [SNITZER 1961].

Die Effizienz der einzelnen Moden zeigt sich beim Vergleich ihrer Anregungsenergien (Abb. 3.17 bis 3.19). Dabei muß vorweggenommen werden, daß die Anregung über die ganze Grenzebene z = 0 beim Einrezeptormodell stärker von der Realität abweicht, da der Einfluß der Nachbarrezeptoren die Anregung der verschiedenen Moden zum Teil erheblich beeinflußt. Daher ist in Wirklichkeit die Bedeutung der HE_{21}Mode für p = 1.0 und der HE_{12}Mode für p = 1.5 viel geringer, weil sie nahe am cut-off (hier fallen die Feldamplitude in radialer Richtung langsamer)

den größten Teil ihrer Energie aus der weiteren Umgebung aufnehmen, in der im Verband längst andere Rezeptoren lokalisiert sind.

Die Anregung über den Querschnitt des Rezeptors allein entspricht dagegen relativ gut einer fokussierten Anregung eines einzelnen Rezeptors im Rezeptorenfeld. Dies trifft umso mehr zu, je kürzer die Lichtwellenlängen werden. Dann werden die einzelnen Moden immer steiler, d.h., ihre Amplituden fallen in radialer Richtung immer stärker ab, so daß der Einfluß von Nachbarrezeptoren die Moden immer weniger verändert.

Bei der fokussierten Anregung nimmt die HE_{11}Mode für kleine Einfallswinkel die meiste Energie auf, bei senkrechtem Einfall sind die andern Moden sogar bedeutungslos (die Moden mit $\ell \neq \pm 1$ haben aus Paritätsgründen die Anregung Null, und die Anregung der Mode HE_{12} - falls sie auftritt - ist unerheblich).

Daher ist in diesen Bereichen die Gesamtenergie S_p fast ausschließlich von der Anregungsenergie der Mode HE_{11} bestimmt (siehe Abb. 3.20 bis 3.22).

Die Ergebnisse lassen gewisse Rückschlüsse auf die Stiles-Crawford Effekte zu, die z.B. von SCHOBER (1964) beschrieben sind. Diese sind die subjektive Folgerung von objektiven Vorgängen in der Netzhaut, und zwar Abschwächen der Intensitätsempfindung bzw. Veränderung des Farbeindrucks bei Vergrößerung des Einfallswinkels.

Die Transmission nimmt ab für schräger werdenden Einfall auf der Netzhaut. Dies ist zu ersehen aus dem Verhalten der HE_{11}Mode, die vor allem für kleine Winkel energetisch weitaus die wichtigste Mode ist. Dazu kommt ein qualitativ ähnliches Verhalten des ausstrahlenden Feldes in Bezug auf die Variation des Einfallswinkels. Im Mittel über

Polarisationsrichtung - im Normalfall fällt ja unpolarisiertes Licht auf die Netzhaut - und über den Wellenlängenbereich des sichtbaren Lichts vermindert sich die Anregung für zunehmende Einfallswinkel. Dies ist die Ursache des Stiles-Crawford Effektes 1. Art. Für senkrechten Einfall auf die Netzhaut spielt beim Einrezeptormodell natürlich die Polarisationsrichtung keine Rolle.

Zu den bisher außer Betracht gelassenen Feldverteilungen muß noch eine Bemerkung gemacht werden. Die anregenden Wellen (angenähert durch ebene Wellen) haben nahezu ausschließlich transversalen Charakter. Das bedeutet bei den in Frage kommenden Einfallswinkeln unerhebliche bzw. verschwindende z-Komponenten des elektromagnetischen Feldes. Die angeregten Moden haben dagegen sowohl transversalen als auch longitudinalen Charakter. Eine Ausnahme machen die TE_{om}Moden, bei denen das elektrische Feld transversal ist, und die TM_{om}Moden, deren magnetisches Feld transversal ist. Diese Tatsache kann in Verbindung mit der in jüngster Zeit diskutierten und auf Grund der geschichteten Struktur sicher vorliegenden Doppelbrechung in den Rezeptoren einen erheblichen Einfluß auf deren Absorptionseigenschaften haben.

4. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das elektromagnetische Absorptionsverhalten von Photorezeptoren im sichtbaren Wellenlängenbereich untersucht. Die Behandlung erfolgt mit Hilfe der klassischen Maxwellschen Theorie.

Dazu wird ein ideales zylindrisches Einrezeptormodell entwickelt. Die Vernachlässigung von Kopplungseffekten bringt für den einzelnen Rezeptor keine großen Änderungen der Eigenschaften. Die elektromagnetischen Eigenschaften des Modells werden isotrop angenommen. Die Dämpfung des Rezeptors wird durch den Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten beschrieben. Die Brechzahlen und der Rezeptorradius sind experimentellen Daten entnommen.

Die Maxwellsche Schwingungsgleichung für die elektromagnetischen Felder wird in Zylinderkoordinaten aufgestellt. Die allgemeinen Lösungen dieser linearen Differentialgleichung 2.Art werden angegeben. Durch Verifizieren verschiedener physikalischer Bedingungen werden daraus jeweils die speziellen Lösungen gewonnen.

Im homogenen Problem (ohne Anregung) stößt man auf die Eigenfunktionen, sogenannte Wellenleitermoden, die nicht mehr ungedämpft den Zylinder entlang laufen, sondern wegen des photosensitiven Mediums im Rezeptor entlang der Laufrichtung geschwächt werden. Allerdings wird dabei ein mehr oder weniger großer Teil der absorbierten Energie aus der Rezeptorumgebung ersetzt. Durch dieses Einziehen von Energie ist die Trichterwirkung der Rezeptoren geklärt, die experimentell festgestellt wurde, für die es aber keine histologischen Beweise gab.

Im Fall der Anregung des unendlichen Zylinders kommt das

Einziehen von Energie aus der Umgebung noch stärker zur Wirkung, weil die anregende ebene Welle permanent neue Energie nachliefert. Anregung und Absorption erfolgen selbst dann noch, wenn die anregende Welle parallel zur Zylinderachse läuft.

Für die Lösung der Anregung eines endlichen Rezeptors durch Einstrahlen einer ebenen Welle auf das Rezeptorende werden durch spezielle Hankeltransformationen die anregende Welle und die Lösungsansätze in eine Form gebracht, die es erlaubt, die notwendigen Stetigkeitsbedingungen an einem Punkt zu erfüllen. Ein Teil der Stetigkeitsbedingungen ist durch die Idealisierung des Modells nicht zu realisieren und wird dabei so gewählt, daß die Resultate, die hier gewünscht werden, nicht verfälscht werden.

Aus der Gesamtlösung werden mit Hilfe der Residuenmethode die Anregungen der bereits qualitativ untersuchten Wellenleitermoden ausgesondert. Das restliche, radial auslaufende Strahlungsfeld ist für den einzelnen Rezeptor nicht von großer Bedeutung.

Dabei zeigt sich, daß die immer auftretende HE_{11}Mode für den Rezeptor die wichtigste ist, zumindest für den Bereich der auf der Netzhaut vorkommenden Einfallswinkel. Ihre Eigenschaften prägen im Wesentlichen die des Rezeptors, modifiziert durch die der andern Moden. Im Mittel ergibt sich bei schrägem Lichteinfall eine geringere Anregung. Weiter spielt die Polarisationsrichtung der anregenden Welle eine große Rolle.

Die Ergebnisse bringen neue Erkenntnisse über die Wirkungsweise der Photorezeptoren und lassen insbesonders gewisse Rückschlüsse auf die Stiles-Crawford Effekte zu.

5. Anhang

A1 Verwendete Formeln

Literaturstellen: ABRAMOWITZ, FLOGGE und WATSON

$$\mathcal{C}_{\ell-1}(z) + \mathcal{C}_{\ell+1}(z) = \frac{2\ell}{z}\,\mathcal{C}_\ell(z)$$

$$\mathcal{C}_{\ell-1}(z) - \mathcal{C}_{\ell+1}(z) = 2\,\mathcal{C}'_\ell(z)$$

$$\int_0^b (k_1^2 - k_2^2)\,\mathcal{C}_\ell(k_1 t)\,\mathcal{D}_\ell(k_2 t)\,t\,dt$$

$$= b\left[k_1\,\mathcal{C}_{\ell+1}(k_1 b)\,\mathcal{D}_\ell(k_2 b) - k_2\,\mathcal{C}_\ell(k_1 b)\,\mathcal{D}_{\ell+1}(k_2 b)\right]$$

$\mathcal{C}_\ell(z)$, $\mathcal{D}_\ell(z)$ sind Zylinderfunktionen

Entwicklung ebener Wellen nach Besselfunktionen

$$e^{ikr} = e^{ik_\rho \rho \sin\varphi}\, e^{ik_z z} = e^{ik_z z} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_\ell(k_\rho \rho)\, e^{i\ell\varphi}$$

wobei $k = \begin{pmatrix} 0 \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$

Hankeltransformation

$$F(\rho) = \int_0^\infty k_\rho\, f(k_\rho)\, \mathcal{J}_\ell(k_\rho \rho)\, dk_\rho$$

$$f(k_\rho) = \int_p^q \rho\, \varphi(\rho)\, \mathcal{J}_\ell(k_\rho \rho)\, d\rho$$

$$F(\rho) = \begin{cases} \varphi(\rho) & : p \le \rho \le q \\ 0 & : 0 \le \rho \le p \quad \text{oder} \quad \rho > q \end{cases}$$

A2 Die numerische Berechnung der Modeneigenwerte κ_{em}

Für die komplexe Bedingungsgleichung det = 0 muß sowohl der Real- als auch der Imaginärteil verschwinden bei Vorliegen von Eigenwerten. Diese zweidimensionale Gleichung läßt sich aber nicht in zwei eindimensionale separieren.

Deshalb wird das Problem zuerst näherungsweise eindimensional gelöst. Durch die Wahl einer reellen Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_I^{(0)} = |\varepsilon_I|$ (betragsmäßig gleich der wirklichen) wird der Imaginärteil der Bedingungsgleichung a priori Null. Daraus erhält man reelle Eigenwerte. Diese entsprechen Moden in ungedämpften Medien.

Diese Nullstellen werden unter Zuschalten einer komplexen Phase zur Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_I^{(n)} = \varepsilon_I^{(0)} e^{i\varphi_n}$ in der komplexen Ebene weiterverfolgt. Die φ_n werden so groß gewählt, daß sich die Nullstellen in einem begrenzten Bereich verändern. Das wird wiederholt, bis der richtige Wert von ε_I erreicht ist.

Dazu waren im vorliegenden Problem jeweils zwei Iterationen notwendig. Die Ermittlung eines Eigenwerts beanspruchte auf der TR 4 des Leibniz-Rechenzentrums zwischen 12 und 18 min.

A3 Numerische Berechnung der Residuen

Ein Residuum eines singulären Punktes bestimmt sich nach der Formel

$$Res(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[f(z) (z-z_0)^m \right]_{z=z_0}$$

die der einschlägigen Literatur zu entnehmen ist.

Da die Nullstellen der Determinante der Koeffizientenmatrix für die Modeneigenwerte $\varkappa_{\ell m}$ einfach sind, handelt es sich bei den singulären Anregungen um Pole 1. Grades. Daher vereinfacht sich die Bestimmung der Residuen zu

$$Res(z_0) = \left[f(z) (z-z_0) \right]_{z=z_0}$$

$f(z)$ entspricht den Anregungskoeffizienten bzw. Hankeltransformierten $e_\ell^I(k_z)$ beziehungsweise $h_\ell^I(k_z)$ für TE_{om} Moden. z_0 sind die Eigenwerte $\varkappa_{\ell m}$, wobei dann k_z die Variable ist. Es kann auch alles nach k_ρ umgerechnet werden.

$$k_\rho^2 = k_I^2 - k_z^2 \quad , \quad k_{\rho\ell m}^2 = k_I^2 - \varkappa_{\ell m}^2$$

Die Residuen sind analytisch nicht zu bestimmen, weil die Nullstellen bzw. die Pole numerisch berechnet sind und daher nie exakt sein können.

Für die numerische Bestimmung der Residuen wird von der Umkehrfunktion $F(z) = 1/f(z)$ die Steigung an den singulären Stellen berechnet. Der Kehrwert dieser Steigung ist gleich dem Residuum.

$$f(z) = g(z) \frac{1}{z-z_0} \qquad F(z) = \frac{1}{g(z)} (z-z_0)$$

Die Steigung von F(z) wird durch die Division der Ordinaten- und Abszissendifferenz zweier nahe an der exakten Singularität liegenden Punkte gebildet.

$$k_{z_1}^{lm} = \varkappa_{lm} , \quad k_{z_2}^{lm} = \varkappa_{lm} + \Delta k_z$$

Danach wird

$$F'(\varkappa_{lm}) = \frac{1/e_l^I(k_{z_1}^{lm}) - 1/e_l^I(k_{z_2}^{lm})}{k_{z_1}^{lm} - k_{z_2}^{lm}}$$

Der Kehrwert ergibt die Residuen

$$Res(\varkappa_{lm}) = \frac{e_l^I(k_{z_1}^{lm}) e_l^I(k_{z_2}^{lm}) (k_{z_1}^{lm} - k_{z_2}^{lm})}{e_l^I(k_{z_2}^{lm}) - e_l^I(k_{z_1}^{lm})}$$

Bei der Variation von Δk_z wurden für die Residuen Schwankungen von maximal 1% festgestellt.

LITERATURVERZEICHNIS

ABRAMOWITZ, M., Handbook of Math. Functions, Dover Publications, N.Y. (1965)

BARER, R., Refractometry and interferometry of living cells, J.Opt.Soc.Am.47,545-556(1957)

CAMPBELL, F.W. und GUBISCH, R.W., Optical Quality of the Human Eye, J.Physiol.186,558-578 (1966)

ENOCH, J.M., Optical Properties of the Retinal Receptors, J.Opt.Soc.Am.53,71-98 (1963)

FLÜGGE, S., Handbuch der Physik Bd. II, S298 ff, Göttingen (1955)

GOUBAU, G., On the Excitation of Surface Waves, Proc.IRE 40,865-868 (1952)

INGELSTAM, E., Problems in Contemporary Optics, Florenz (1956)

KAPANY, N.S., BURKE, J.J. und SHAW, C.C., Evanescent boundary wave propagation, J.Opt.Soc.Am.53, 929-935 (1963)

KAPANY, N.S., (Herausgeber) Fiber Optics, Academic Press, N.Y. (1967)

PIRENNE, M.H., Absolute threshold and quantum effects in The Eye Bd.II (von H. Davson) S 137, Academic Press, N.Y. (1962)

RÖHLER, R. und FISCHER, W., Influence of waveguide modes on the light absorption in photoreceptors, Vision Res.11,97-101 (1971)

RÖHLER, R., MILLER, U. und ABERL, M., Zur Messung der Modulationsübertragungsfunktion des lebenden menschlichen Auges im reflektierten Licht, Vision Res.9,407-428 (1969)

SCHOBER, H., (Herausgeber) Das Sehen Bd. II, Veb Fachbuchverlag Leipzig (1964)

SNITZER, E., Cylindrical dielectric waveguide modes, J.Opt.Soc.Am.51,491-498 (1961)

SNITZER, E. und OSTERBERG, H., Observed dielectric waveguide modes in the visible spectrum, J.Opt.Soc.Am.51,499-505 (1961)

SNYDER, A.W., Surface waveguide modes along a semi-infinite dielectric fiber excited by a plane wave, J.Opt.Soc.Am.56,601-606(1966)

TORALDO DI FRANCIA, G., Retina cones as dielectric antenas, J.Opt.Soc.Am.39,324 (1949)

WATSON, G.N., The Theory of Bessel Functions, London (1949)

WOLKEN, J.J., (Herausgeber) Vision, Springfield, Ill.

Mein besonderer Dank gebührt den Herren Professoren Dr. Dr. H. Schober und Dr. R. Röhler für die Themenstellung und für ihr förderndes Interesse an dieser Arbeit.

Danken möchte ich auch den übrigen Mitarbeitern des Instituts, die mich in Wort und Tat unterstützt haben.

Den Mitarbeitern des Leibniz-Rechenzentrums München und des MPI für Plasmaphysik in Garching, die mich bei den umfangreichen numerischen Rechnungen unterstützt haben, danke ich ebenfalls.

Lebenslauf

Werner Fischer	geboren am 5. Aug.42 in Plochingen a.N., Kreis Esslingen Vater, Otto Fischer, Metalldrücker Mutter, Berta, geb. Burger
Schulbildung und beruflicher Werdegang	1948 - 1952 Volksschule in Reichenbach/F 1952 - 1961 Georgii-Gymnasium Esslingen 3. März 1961 Reifeprüfung April - Oktober 1961 Industriepraktikum bei der Firma Eberhard Bauer in Esslingen 1961 - 1965 Physikstudium an der Technischen Hochschule Stuttgart 1966 - 1968 Physikstudium an der Universität in München 6. Mai 1968 Diplomprüfung (TH Stuttgart) Seit Sommer 1968 unter der Leitung von Prof. Dr. R. Röhler am Institut für med. Optik der Universität München mit der vorliegenden Dissertation beschäftigt.